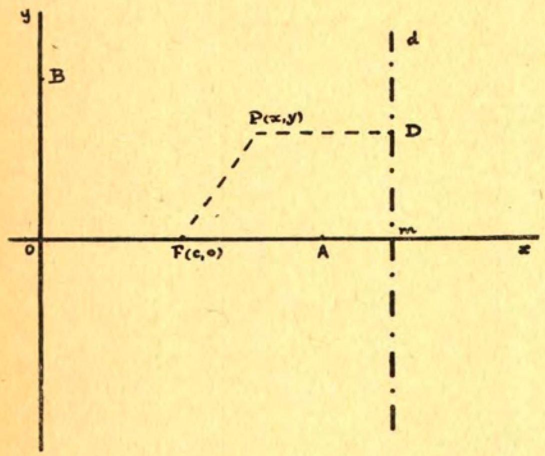
TRIBUNA DO LEITOR

Uma dedução elementar da forma canónica das equações das cónicas

por **Pedro R. de Almeida**

Cónica é o lugar geométrico dos pontos P cujas distâncias a um ponto fixo F (*foco*) e uma recta d, também fixa, (*directriz*) estão numa razão constante e, (*excentricidade*).

Tomemos um referencial ortogonal com $X'X$ passando por F perpendicularmente a d.



Seja c a abscissa do foco e $y = m$ a equação da directriz. Por definição de cónica, tem-se:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = \frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|m-x|} = e$$

donde

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2 (m-x)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2 m^2 - 2e^2 mx + e^2 x^2$$

(1) $\quad (1-e^2)x^2 - 2(c - e^2 m)x + y^2 = e^2 m^2 - c^2$

Conforme for $e < 1$, $e > 1$ ou $e = 1$, assim se tem uma *elipse*, uma *hipérbole*, ou uma *parábola*.

1) *Elipse* $\quad e < 1, \quad 1 - e^2 > 0$.
Escolhamos m de modo a anular o termo em x: $\quad c - e^2 m = 0$ ou $m = \dfrac{c}{e^2}$.

A equação da directriz é $y = \dfrac{c}{e^2}$.

Então (1) torna-se:

(2) $\quad (1-e^2)x^2 + y^2 = \dfrac{c^2(1-e^2)}{e^2}$.

A curva corta os eixos nos pontos

$$A\left(\frac{c}{e}, 0\right), \quad A'\left(-\frac{c}{e}, 0\right),$$

$$B\left(0, \frac{c\sqrt{1-e^2}}{e}\right), \quad B'\left(0, -\frac{c\sqrt{1-e^2}}{e}\right),$$

(*vértices da curva*).

Pondo $\dfrac{c}{e} = a$ e $\dfrac{c\sqrt{1-e^2}}{e} = b$, a equação (2) toma a forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a *equação canónica da elipse*.

De $\dfrac{c^2(1-e^2)}{e^2} = b^2$ e $\dfrac{c}{e} = a$, tira-se: $a^2 - c^2 = b^2$ ou $a^2 = b^2 + c^2$ e como $\dfrac{c}{e^2} = \dfrac{a}{e}$ e $e < 1$, tem-se: $\dfrac{a}{e} > a > c$. Então a posição relativa de F,

A, e d é a indicada na figura. E como c e a se acompanham em sinal, ao vértice A', simétrico de A com respeito à origem, corresponde um foco $F'(-c, 0)$ e uma directriz $d' \equiv x = -\frac{a}{e}$, simétricos de F e d com respeito à origem.

2) *Hipérbole* $e > 1$, $e^2 - 1 < 0$.

Procedendo como anteriormente, (1) torna-se:

$$-(e^2-1)x^2 + y^2 = -\frac{c^2(e^2-1)}{e^2}$$

ou

$$(e^2-1)x^2 - y^2 = \frac{c^2(e^2-1)}{e^2}$$

A curva corta OX nos pontos

$$A\left(\frac{c}{a}, 0\right) \text{ e } A'\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

e OY nos pontos imaginários

$$B\left(0, \frac{c\sqrt{e^2-1}}{e}i\right) \text{ e } B'\left(0, -\frac{c\sqrt{e^2-1}}{e}i\right)$$

(*vértices da curva*).

Pondo $\frac{c}{e} = a$ e $\frac{c\sqrt{e^2-1}}{e} = b$,

a equação da curva toma a forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a *equação canónica de hipérbole* com o *eixo real* ou *transverso* segundo OX.

De $\frac{c^2(e^2-1)}{e^2} = b^2$ tira-se $c^2 - a^2 = b^2$ ou $c^2 = a^2 + b^2$ e como $\frac{c}{a} = \frac{a}{e}$ e $e > 1$, tem-se $\frac{a}{e} < a < c$. Então a posição relativa de d, A e F não é representada na figura, ficando d à esquerda de A e F à direita.

3) *Parábola* $e = 1$.

A equação (1) torna-se:

$$-2(c-m)x + y^2 = m^2 - c^2$$

Escolhamos m de modo que $m^2 - c^2 = 0$ ou $m = \pm c$. Para $c = m$ vem $y^2 = 0$ que é a equação de duas rectas coincidentes com OX, caso particular da parábola. Para $m = -c$, vem:

$$y^2 = 4mx \text{ ou, pondo } 2m = p$$

$$y^2 = 2px$$

que é a *equação canónica da parábola*.

Então tem-se: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ e $d \equiv x = -\frac{p}{2}$.

A origem dos eixos é um ponto da curva; é precisamente o seu *vértice*.

Recomendação n.º 43 da Conferência Internacional da Instrução Pública

A Conferência Internacional da Instrução Pública, convocada para Genebra, pela Organização das Nações Unidas para a educação, para a ciência e cultura, e pela Junta Internacional da Educação, tendo-se aí reunido em 9 de Julho de 1956, na sua 19.ª sessão, adopta, a 17 de Julho de 1956, a recomendação seguinte:

A Conferência:

Considerando que a matemática teve sempre um valor cultural e prático indiscutível e uma função importante no desenvolvimento científico, técnico e económico e, em particular, que a nossa época apresenta uma conjuntura matemática sem precedente na história;

Considerando que a formação matemática é um bem e um direito para todo o ser humano, quaisquer que sejam a sua raça, o seu sexo, a sua condição e as suas actividades;

Considerando que, para assegurar o progresso e a prosperidade dos povos, a elevação do nível matemático geral deve acompanhar o desenvolvimento técnico e científico superior;

Considerando que as diversas civilizações desempenharam um papel na criação e desenvolvimento da matemática;

Considerando que a psicologia reconhece que todo o ser humano é capaz de uma certa actividade matemática e que, particularmente, não há nenhuma razão para crer que as raparigas são menos aptas que os rapazes para estudar a matemática;

Considerando que a pedagogia da matemática se torna cada dia mais científica e mais eficaz;

Considerando que há razões para dar um prolongamento à Recomendação n.º 31, respeitante à iniciação matemática na escola primária, adoptada pela 16.ª Conferência Internacional da Instrução Pública;

Submete aos Ministérios da Instrução Pública dos diferentes países a recomendação seguinte:

Objectivos do ensino da matemática

1 — No decurso dos estudos secundários, quer técnicos quer de formação geral, convém atingir, na mais larga medida possível, os fins educativos do ensino da matemática que dizem respeito às funções intelectuais e à formação do carácter. Esses fins resultam dos progressos da lógica em acção (reflectir, analisar, abstrair, esquematizar, raciocinar dedutivamente, generalizar, especializar, aplicar, criticar, etc.); das qualidades racionais do pensamento e da sua expressão (ordem, precisão, clareza, concisão, etc.); do espírito de observação; das concepções especiais e quantitativas; da intuição e da imaginação do domínio abstracto; do desenvolvimento da atenção e do poder de concentração; da aquisição da perseverança e do hábito do trabalho ordenado e, enfim, da formação do espírito científico (objectividade, probidade intelectual, gosto da pesquisa, etc.);

2 — As operações de ordem prática, a adaptação ao meio natural e a necessidade de compreender os problemas que suscita a vida técnica, económica e social exigem cada vez mais conhecimentos matemáticos correntes (cálculo, geometria usual, representações geométricas, fórmulas, equações, funções, tábuas, e gráficos). Estas noções e meios fundamentais intervêm também num número crescente de profissões;

3 — A matemática e o estilo de pensamento que lhe é peculiar devem ser considerados como um elemento essencial da cultura geral do homem moderno, mesmo que ele não desempenhe uma actividade científica ou técnica.

É de desejar que o ensino da matemática, em estreita ligação com o ensino de outras disciplinas, conduza os alunos a compreender a função que desempenha a matemática nas concepções científicas e filosóficas do mundo actual;

4 — Um dos fins principais do curso adiantado de matemática nos últimos anos do ensino secundário deve ser a preparação para os estudos superiores científicos ou técnicos cuja base matemática aumenta dia a dia.

Lugar da matemática

5 — O ensino da matemática, obrigatório nas diferentes classes do ciclo inferior das escolas secundárias, deve dispor de um número de horas adequado;

6 — No ciclo superior das secções científicas, o curso de matemática deve beneficiar de um horário amplo;

7 — É de desejar que os alunos que manifestam disposições especiais para os estudos científicos tenham a possibilidade de seguir um ensino mais desenvolvido e que possam dedicar-se a estudos complementares pessoais;

8 — Nos países em que o ensino da matemática não figura a título obrigatório em certas secções (secções literárias, por exemplo), um ensino de matemática com tendência cultural, de preferência a pura técnica matemática, deveria ser organizado, pelo menos a título facultativo;

9 — A importância atribuída à matemática, por ocasião da apreciação dos resultados dos alunos, qualquer que seja a maneira de a exprimir, deve ser proporcional ao valor que é reconhecido a esta disciplina. Quando esta é obrigatória, e especialmente em secções científicas, ela deverá ser considerada como uma das disciplinas principais, designadamente na altura das passagens de classe e da atribuição dos certificados de fim de curso.

Programas

10 — O programa de matemática de uma secção determinada da escola secundária deve estar de harmonia com os fins gerais do ensino deste ramo e com os objectivos particulares da secção;

11 — Os programas serão mantidos em dia e adaptados aos progressos das ciências e às necessidades da técnica e da vida modernas, sacrificando questões antiquadas. Tomar-se-á particularmente em consideração o facto de que, para elevar o nível dos programas das classes superiores, certos países introduziram a geometria analítica, o cálculo infinitesimal, a estatística e as probabilidades e concedem uma importância ao estudo das funções e dos vectores, assim como às aplicações da matemática.

12 — A dificuldade e a extensão das matérias a ensinar estarão em relação com a idade mental média correspondente a cada classe e com os interesses e as

necessidades dos alunos. Se convém dar aos indivíduos dotados para a matemática complementos, é preciso evitar provocar o desalento dos alunos fracos impondo-lhes matérias cuja complexidade ultrapassa os seus recursos intelectuais;

13 — Convém estabelecer os planos de estudo de maneira a organizar o ensino da matemática à volta de unidades funcionais que coordenem os seus diversos ramos, embora destacando as noções gerais;

14 — Nesta ordem de ideias, é de desejar determinar, por ensaios pedagógicos realizados sem preconceitos, em que medida as estruturas amplamente polivalentes da matemática moderna podem servir para melhorar o ensino secundário;

15 — Seria desejável que os professores tivessem uma certa liberdade de iniciativa para prolongar eventualmente os programas-base por complementos facultativos.

Métodos

16 — Quando são dadas directivas metodológicas, convém que elas sejam conselhos e sugestões tendentes a conformar o ensino ao mesmo tempo com o progresso da psicologia da inteligência e da pedagogia da matemática e com a natureza e uso da matemática, ciência teórica que tem uma origem ligada ao real e um alcance eficaz na nossa acção sobre ele;

17 — Tudo deve ser posto para estimular e favorecer no aluno a aprendizagem activa da matemática por uma participação pessoal tão vasta quanto possível na sua elaboração;

18 — É necessário:

a) despertar e manter o interesse dos alunos tanto pela matemática em si mesma como pelas suas aplicações;

b) estar atento à marcha do pensamento matemático juvenil;

c) adaptar o ensino às capacidades individuais e à evolução mental dos alunos e diferenciá-lo sucessivamente segundo o seu destino;

19 — É preciso:

a) partir tanto quanto possível do concreto para chegar ao abstracto sobretudo nas classes inferiores, e, cada vez que isso se mostre vantajoso, apelar para a experimentação real, figurada ou imaginada, para sugerir a definição ou a demonstração;

b) ter em conta que o conhecimento matemático nasce e desenvolve-se pela interiorização das acções concretas e pela organização dos esquemas operatórios;

c) aproveitar questões suscitadas pelas situações concretas, não sòmente para mostrar a importância prática da matemática, mas sobretudo para motivar desenvolvimentos teóricos;

20 — Importa:

a) conduzir o aluno a formular as noções e a descobrir as relações e as propriedades matemáticas, em vez de lhe impor um pensamento adulto completamente elaborado;

b) assegurar a aquisição das noções e dos processos operatórios antes de apresentar o formalismo;

c) não confiar ao automatismo senão as operações assimiladas;

21 — É indispensável:

a) fazer adquirir primeiramente ao aluno a experiência dos seres e das relações matemáticas e iniciá-lo, em seguida, no raciocínio dedutivo;

b) alargar progressivamente a construção dedutiva da matemática;

c) ensinar a pôr problemas, a buscar dados, a explorar e apreciar os resultados;

d) conceder a preferência à investigação heurística das questões e não à exposição doutrinal dos teoremas;

e) fazer tomar consciência da estrutura duma teoria hipotético-dedutiva em que, sobre a base dos postulados, os teoremas são construídos por demonstrações e os termos novos introduzidos por definições, de maneira a chegar a uma exposição lógica dedutiva da matéria estudada;

22 — É preciso:

a) estudar os erros dos alunos e ver neles um meio de conhecer o seu pensamento matemático;

b) conduzir à prática do controle pessoal e da auto-correcção;

c) dar o sentido da aproximação, da ordem da grandeza e da verosimilhança dos resultados;

d) dar a prioridade à reflexão e ao raciocínio, de preferência ao «adestramento» e ao «de cor», e limitar o papel da memória à fixação dos resultados fundamentais;

e) propor assuntos de exame que exijam mais formação matemática que preparação intensiva;

23 — Importa:

a) encorajar os modos de expressão pessoais, mesmo aproximados, e melhorá-los gradualmente;

b) levar o aluno à precisão e ao rigor pelas necessidades de uma comunicação eficaz com outrem e uma exigência de clareza do seu próprio pensamento;

c) favorecer a pesquisa e a iniciativa individuais tanto como o trabalho de equipa;

d) aumentar o número de alunos que se interessem pela matemática e contribuir para desenvolver a sua formação e os seus conhecimentos organizando círculos, conferências, competições e outras manifestações de carácter facultativo e difundindo livros e revistas que lhes sejam acessíveis;

24 — É indispensável:

a) sublinhar a unidade intrínseca da matemática, não lhe separar os ramos e relacionar os diversos métodos de resolução duma questão dada;

b) indicar as etapas importantes da história das noções e das teorias matemáticas estudadas;

25 — É necessário:

a) manter a coordenação da matemática com as ciências que dela fazem uso;

b) tirar partido das exigências do pensamento matemático para aumentar a precisão, a clareza e a concisão da linguagem;

c) manter o contacto da matemática com a vida real.

Material didáctico

26 — A evolução da metodologia da matemática exige uma adaptação dos manuais. Ao lado dos livros de iniciação na matemática que permitem o acesso progressivo às noções abstractas, o aluno deverá poder dispor de obras de revisão, em que as matérias adquiridas são retomadas e organizadas num plano mais elevado. Deverão ser postas à disposição de cada um, nas bibliotecas de turma, obras de referência, de complemento e de vulgarização, revistas, etc..

Essa documentação será adaptada aos objectivos das diferentes secções e respeitará, para cada uma delas, a dosagem entre o ponto de vista prático, as necessidades técnicas, os desenvolvimentos teóricos e a preocupação cultural;

27 — Desempenhando os auxiliares audio-visuais os modelos matemáticos concretos (tirados da vida corrente, construídos pelos alunos ou pelos professores ou ainda fabricados por firmas comerciais), um lugar cada vez mais importante no ensino, convém tirar partido do seu uso para fazer adquirir activamente, pelos alunos, as abstracções matemáticas.

Pessoal docente

28 — Em matemática, mais talvez que noutras disciplinas, o papel do professor é primordial. O recrutamento, a formação e o aperfeiçoamento dos professores de matemática devem ser objecto duma atenção e duma solicitude particulares da parte das autoridades responsáveis pela educação da juventude;

29 — Os professores encarregados de ensinar a matemática nas escolas secundárias devem ter uma formação matemática dum nível nìtidamente superior ao do seu ensino. Essa formação deve comportar não só o estudo da matemática teórica, mas uma parte de matemática aplicada, a história geral do pensamento matemático, a própria metodologia da ciência matemática e o estudo da matemática elementar considerada dum ponto de vista superior;

30 — Uma preparação pedagógica e psicológica adequada deve ser o complemento indispensável da formação matemática do professor e inspirar-se num conhecimento claro e bastante profundo dos objectivos gerais e dos princípios da educação humana. Essa preparação deve incidir sobre a evolução estrutural da inteligência em relação com a elaboração do pensamento matemático. Ela dará um lugar às relações do concreto e do abstracto, de forma a situar a metodologia dos modelos no ensino matemático.

O futuro professor será encaminhado à observação e à experimentação em matéria de pedagogia matemática. Acima de tudo, deverá ser-lhe despertado o interesse pelos adolescentes e pelas suas aspirações, afim de que ele possa ser o animador e o guia da juventude;

31 — Convém velar para que todos os alunos das classes inferiores e os alunos menos dotados das classes superiores tenham bons mestres;

32 — É preciso que o professor de matemática em exercício possa estar a par ao mesmo tempo da evolução moderna das ciências matemáticas teóricas, das aplicações actuais importantes da matemática e dos progressos recentes da didáctica da sua disciplina.

É de desejar que sejam tomadas medidas com vista a facilitar o aperfeiçoamento dos professores: conferências, cursos de férias, seminários, grupos de trabalho, estágios, publicações, etc.;

33 — As sugestões de inspectores especializados ou de conselheiros pedagógicos e o exemplo do trabalho de professores experimentados são meios excelentes para aumentar o rendimento do ensino;

34 — O professor de matemática deve gozar, na sociedade moderna, da consideração e da categoria social a que lhe dão direito a sua formação científica e a sua missão de educador;

35 — Visto que em todos os países um ensino adequado da matemática é um elemento essencial da educação, importa assegurar o recrutamento dum número suficiente de professores competentes, tanto mais que está nisso uma condição para o desenvolvimento científico, técnico, económico e social de todos os povos.

Colaboração internacional

Os Governos e os organismos culturais ou educativos internacionais, tais como a Unesco, a Junta Internacional da Educação, a Comissão Internacional do Ensino da Matemática, a Comissão Internacional para o Estudo e Melhoramento do Ensino da Matemática, devem favorecer, por todos os meios (publicações, conferências, reuniões, exposições, viagens de estudo e estágios no estrangeiro, etc.) o intercâmbio internacional das ideias, dos trabalhos, das pesquisas e dos resultados obtidos no ensino da matemática, a fim de que a juventude de todo o Mundo possa beneficiar o mais cedo possível das experiências e dos progressos realizados pelos professores de todos os países.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

DR. JOÃO JOSÉ LOPES FARINHA

No dia 19 de Outubro faleceu numa clínica de Paris, o Dr. João José Lopes Farinha, membro do corpo redactorial da *Gazeta de Matemática* — e elemento de primeiro plano no nosso reduzido quadro de investigadores e professores de Matemática.

João Farinha licenciou-se na Universidade de Coimbra, com distinção, em 1934. Os seus méritos ficaram inaproveitados durante muitos anos, em que a sua actividade se limitou ao ensino médio em vários colégios particulares daquela cidade. Só em 1950 a Faculdade de Ciências de Coimbra o chamou para ocupar um lugar de segundo assistente, que viria a oferecer-lhe a oportunidade de se dedicar, com desvelo e sentido das responsabilidades, à investigação científica. Do seu labor neste campo deu provas na dissertação de doutoramento (1954), sobre a convergência de fracções contínuas, e em cerca de uma dezena de trabalhos originais publicados em diversas revistas.

Mas ao lado das suas qualidades de investigador próbo e arguto, realçaram em João Farinha dons pouco vulgares de professor — com uma exposição aliciante, bom senso na maneira de a conduzir, e uma vigilante atenção na organização dos seus cursos. As lições do curso de «Probabilidades, Erros e Estatística» são modelares, e bem mereciam ser editadas; porque se um livro não pode, na frieza das suas páginas, transmitir o entusiasmo e o calor humano com que João Farinha fazia as suas aulas, poderá ao menos revelar com que exemplar atenção as escolhia e preparava.

A morte surpreendeu-o prematuramente quando, beneficiando de uma bolsa da Fundação Calouste Gulbenkian, se especializava em Mecânica Quântica, no Instituto Henri Poincaré. Com o seu desaparecimento perde a Faculdade de Ciências de Coimbra um dos seus colaboradores de maior préstimo. Mas da vaga que deixou em aberto não sofre apenas a Escola que serviu: sentimo-lo todos os que à valorização do Estudo da Matemática temos procurado dar, na medida das nossas possibilidades, o melhor dos nossos esforços.

Registo bibliográfico

Na *Gazeta de Matemática* publicou o Dr. João Farinha os seguintes trabalhos:

«O teorema dos resíduos e o cálculo da soma de uma série», N.º 44-45 (1950), pág. 15.

«Sobre um caso de convergência de fracções contínuas de elementos complexos», N.º 50 (1951), pág. 81.

Eis os títulos dos restantes trabalhos publicados pelo Dr. João Farinha:

Exercícios de Álgebra e Geometria Analítica (de colaboração com Luís Albuquerque), Coimbra, 1946.

Exercícios de Geometria Descritiva (Idem), Coimbra, 1951.

Sobre a convergência de fracções contínuas de elementos complexos (Tese), Coimbra, 1953.

«Sobre dois teoremas de Pincherle», *Rev. da Fac. Cien.* de Coimbra, 21 (1952), pág. 161.

«Sur les limites des zéros d'un polynôme», *Rev. da Fac. Cienc* de Lisboa, 2.ª série, A, 3 (1953), 181.

«Fracções contínnas ascendentes periódicas», *Rev. da Fac. Cienc.* de Coimbra, 22 (1953), 110.

«Sur la convergence de $\Phi\, a_i/1$», *Port. Math.* 13 (1954), 145.

«Quelques propositions concernant les zéros d'un polynôme», *Rev. da Fac. Cienc.* de Lisboa, 2.ª série, A, 4 (1954-55), 187.

«Sur la moyenne arithmétique», *Rev. da Fac. Cienc* de Coimbra, 23 (1954), 14.

«Une condition de convergence», *Ibidem*, pág. 17.

«Sur la probabilité maximum d'accord de deux états», *Ibidem*, pág. 21.

«Sobre o valor preferível de uma série de observações» (comunicação). *Assoc. Port. para o Progresso das Ciências. XXIII Congresso Luso-Espanhol* — Coimbra, 1956, vol. III, pág. 41.

L. A.