DOUTORAMENTOS NA F. C. L.

Nos dias 15 e 16 de Julho deste ano tiveram lugar na Faculdade de Ciências de Lisboa as provas de doutoramento em Ciências Matemáticas dos assistentes daquela Faculdade José Tiago de Oliveira e Raimundo de Oliveira Vicente. O primeiro candidato apresentou a dissertação «Residuais de Sistemas e radicais de anéis» que foi arguida pelos Profs. Almeida Costa e Arnaldo Madureira. A dissertação do segundo candidato versou o tema «A influência da constituição do interior da Terra no valor das nutações» e teve como arguentes os Profs. Francisco Nazaré e Manuel dos Reis.

Ambos os doutorandos foram aprovados com a classificação de dezoito valores.

A «Gazeta de Matemática» felicita os novos Doutores.

J. J. D.

CONGRESSO INTERNACIONAL DOS MATEMÁTICOS 1958

Em Edimburgo, de 14 a 21 de Agosto de 1958, sob o patrocínio das Municipalidade e Universidade de Edimburgo e da Sociedade Real de Londres, realizar-se-á o Congresso Internacional dos Matemáticos.

A Comissão de Organização propõe-se convidar certo número de matemáticos para realizarem conferências de 1 a $1^1/_2$ horas. Haverá também reuniões cotidianas consagradas à apresentação de comunicações de $^1/_4$ hora.

Os membros do Congresso que desejarem apresentar comunicações fá-lo-ão a partir de Janeiro de 1958.

O Congresso terá oito secções:

1 — Lógica e fundamentos das matemáticas
2 — Álgebra e teoria dos números
3 — Análise
4 — Topologia
5 — Geometria
6 — Cálculo das probabilidades e Estatística
7 — Matemáticas aplicadas, física matemática e análise numérica
8 — História e ensino.

O Comité prevê durante o Congresso uma série de recepções, reuniões de ordem recreativa, excursões, etc.

O Congresso comportará duas categorias de membros:

Membros ordinários, tendo o direito de participar em todas as actividades do Congresso e de receber as Comunicações.

Membros associados, acompanhando os membros ordinários e gosando de todos os privilégios excepto os de participar nas reuniões científicas e receber as Comunicações.

Mais informações poderão ser obtidas quer por intermédio da Gazeta de Matemática quer pela Secretaria do Congresso:

Secretário — Frank Smithies, Mathematical Institute, 16, Chambers Street, Edinburgh, 1, Scotland.

J. G. T.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 29-6-57.

4311 — *a)* Defina limite mínimo e limite máximo duma sucessão u_n e diga em que caso estes limites coincidem, respectivamente, com o limite inferior e o limite superior de (u_n). Quando não se dá essa coincidência quais são os limites de Weierstrass de (u_n)?

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{n!}{\log n}}$$

b) Enuncie a condição necessária e suficiente de convergência duma série e prove a sua necessidade. Enuncie os critérios da raíz e da razão, demonstre este último e exemplifique com a série harmónica que as condições $\sqrt[n]{a_n} < 1$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ não garantem convergência.

Se $\mu = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$, indique os valores de μ para os quais a série $\Sigma a_n (x - x_0)^n$ é: (1) convergente para todos os valores de x; (2) divergente para todo o $x \neq x_0$; (3) convergente em certo intervalo (a, b) (indique os valores de a e b).

Estude a natureza da série $\Sigma a^{\log n}$ (considere os casos $a > 1$ e $a < 1$).

R: a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\log n} = \frac{1}{\infty} = 0$. Aplicando um teorema de Cauchy, calcule-se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad com \quad x_n = \frac{n!}{n^n \log n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!\, n^n \log n}{(n+1)^{n+1} \log (n+1)\, n!} = $$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{\log n}{\log (n+1)} = \frac{1}{e}.$$

Como este limite existe, então $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{e}$.

b) *Com* $a > 1$ *o termo geral* $u_n = a^{\log n}$ *é um infinitamente grande e a série é divergente.*

Considerando $a < 1$, *aplique-se o critério de* Raabe:

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} n \left[\frac{a^{\log n}}{a^{\log (n+1)}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \left[a^{\log \frac{n}{n+1}} - 1\right] = \lim_{n \to \infty} n \left[e^{\log a \cdot \log \frac{n}{n+1}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} n\, \eta^{-1} \log a \log \frac{n}{n+1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \eta^{-1} \log a \log \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = -\log a = \log \frac{1}{a}.$$

Se $\log \frac{1}{a} > 1$ *ou* $a < \frac{1}{e}$, *a série é convergente; se* $\log \frac{1}{a} < 1$ *ou* $a > \frac{1}{e}$ *a série é divergente. Se* $a = \frac{1}{e}$ *é fácil ver que* $\Sigma a^{\log n}$ *se reduz à série* $\Sigma \frac{1}{n}$ *divergente.*

Resumindo: *a série é convergente se* $a < \frac{1}{e}$ *e divergente se* $a > \frac{1}{e}$.

4312 – Enuncie e demonstre o teorema que garante a continuidade de $F(x) = \Phi[f(x)]$ em $x = a$. Mostre que, existindo $f'(a)$ e $\Phi'(b)$, é $F'(a) = \Phi'(b) \cdot f'(a)$, com $b = f(a)$, e diga como pode concluir desta regra que a derivada de uma função é a inversa aritmética da derivada da função inversa.

Calcule

$$\mathrm{P} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)}.$$

b) Demonstre o teorema de Lagrange para as funções regulares e indique a sua interpretação geométrica.

Escreva a fórmula de Taylor para a função $f(x)$, referente a $x = a$, e mostre a sua aplicação ao estudo dos máximos e mínimos.

R: *Decomponha-se prèviamente a fracção proposta em elementos simples.*

$$\frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)} = \frac{a_0 + a_1 (x-1)}{(x-1)^2} + \frac{S_0}{x^2+1}.$$

O polinómio $a_0 + a_1 (x-1)$ *obtem-se, ordenando segundo as potências crescentes de* $(x-1)$ *o numerador e o denominador da fracção auxiliar* $R_1(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2+1}$ *e efectuando a divisão algébrica até obter um cociente do grau* 1. *Ter-se-á então* $R_1(x) = \frac{2 + 4(x-1) + \cdots}{2 + 2(x-1) + \cdots}$ *que permite obter o polinómio* $1 + (x-1)$.

Para obter S_0 *(expressão linear) considere-se a fracção auxiliar* $R_\Delta(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$ *e proceda-se à ordenação do numerador e denominador segundo as potências crescentes de* $\Delta = x^2 + 1$. *Obtem-se*

$$R_\Delta(x) = \frac{-2x + \cdots}{-2x + \cdots} \quad e \quad S_0 = 1.$$

Então

$$\frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)} = \frac{1 + (x-1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$e \quad \mathrm{P} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)} = \mathrm{P} \frac{1}{(x-1)^2} + \mathrm{P} \frac{1}{x-1} +$$

$$+ \mathrm{P} \frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{x-1} + \log |x-1| + \operatorname{arctg} x + C.$$

4313 – Responda a uma das seguintes alíneas:

a) Deduza o teorema dos acréscimos finitos para a função de duas variáveis $f(x, y)$.

Escreva a fórmula que dá a derivada de $f(x, y)$ ao longo da curva de equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ e diga o que é a derivada de $f(x, y)$ segundo uma direcção r.

Qual a condição necessária e suficiente para que a derivada de $f(x,y)$ em $P(a,b)$ se anule em todas as direcções?

b) Demonstre o teorema fundamental do Cálculo Integral.

Estabeleça as diferenças e analogias entre o integral indefinido e a função primitiva de $f(x)$ no intervalo (a,b).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência extraordinário — 8-7-957.

4314 — *a*) Enuncie a condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão e prove que sucessão monótona limitada verifica essa condição.

Prove que $\sqrt[n]{P_1 \cdot P_2 \cdots P_n} \to P$ quando $P_n \to P$ e aplique esta proposição ao cálculo de

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{a}{n}\right)^n}.$$

b) Demonstre que se obtem uma série convergente, multiplicando os termos de uma série convergente por números positivos decrescentes.

Defina série absolutamente convergente e prove que a sua soma é independente da ordem dos seus termos.

Supondo que $\frac{u_n}{a_n}$ tende para limite finito com u_n qualquer e $a_n > 0$ prove que $\sum u_n$ é absolutamente convergente se $\sum a_n$ for convergente.

Calcule S_n para a série $\sum \log \frac{n+1}{n}$ e conclua que ela é divergente.

R: a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

b) $$S_n = \sum_1^n [\log(n+1) - \log n] = \log(n+1).$$

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, *a série é divergente.*

4315 — Demonstre que função contínua num intervalo não passa de um valor a outro sem passar pelos valores intermédios.

Defina oscilação da função $f(x)$ em $x=a$ e prove que em ponto de continuidade a oscilação é nula. A recíproca é verdadeira? Porquê?

Prove que num ponto interior de máximo ou mínimo de $f(x)$ a derivada $f'(x)$ é nula ou infinita de duplo sinal.

Determine intervalos de monotonia, extremos e sentido da concavidade de $y = \frac{x}{x-1}$.

R: *Como* $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ *vem fàcilmente*

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

o que indica que a função é sempre decrescente.

$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ *e portanto a concavidade está voltada para baixo em* $(-\infty, 1)$ *e para cima em* $(1, +\infty)$.

4316 — Prove que $f(x,y)$ é contínua num ponto onde tem derivadas finitas desde que em torno desse ponto uma das derivadas se conserve limitada.

Considerando $x = \varphi(u)$ e $y = \psi(u)$ diferenciáveis em $u = u_0$ e $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ $(a = \varphi(u_0), b = \psi(u_0))$ escreva a expressão da primeira derivada de $F(u) = f[\varphi, \psi]$ em $u = u_0$. Deduza a expressão da segunda derivada.

Enuncie as condições em que a equação $f(x,y) = 0$ define uma função implícita $y = \varphi(x)$ na vizinhança do ponto $P(a,b)$ e prove que, sendo $f(x,y)$ diferenciável em $P_1(a_1, b_1)$ e $f'_y(a_1, b_1) \neq 0$, então $y = \varphi(x)$ é diferenciável para $x = a_1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Julho — (1.ª chamada) — 15-7-1957.

4317 — 1) Separe os zeros de $x^3 - 3x^2 - 4x + 13$, utilizando a sucessão de Fourier e calcule o menor pelo método de Newton, em primeira aproximação.

2) Sejam $A^1, \cdots A^n$ e B $n+1$ vectores do espaço a n dimensões. Mostre que o último é composição linear dos primeiros sempre que estes sejam independentes. Qual é a condição de independência?

Admitida a independência quais são os valores de λ_i na composição $B = \lambda_i A^i$?

R: *Os limites excedente e deficiente, calculados pelo método de* Newton, *são, respectivamente,* $L = 3$ *e* $l = -3$.

Construindo o quadro

	−3	−2	−1	0	1	2	3
f	−	+	+	+	+	+	+
f′	+	+	+	−	−	−	+
f″	−	−	−	−	0	+	+
f‴	+	+	+	+	+	+	+
var.	3	2	2	2	2	2	0

verifica-se que a sucessão de Fourier *perde uma variação no intervalo* $(-3, -2)$ *e duas no intervalo* $(2, 3)$.

Então existe um zero no primeiro intervalo e dois ou nenhum no segundo.

Como em $(2,3)$ $f'' \neq 0$, *todas as condições de* FOURIER *são necessárias mas, como se verificam, nada esclarecem.*

Calculando o zero da primeira derivada em $(2,3)$, *que é* $x' \approx 2,5$, *conclui-se pela existência de dois zeros para* $f(x)$ *pois* $f(2) > 0$ *e* $f(2,5) < 0$.

Existem assim três zeros reais nos intervalos $(-3,-2)$, $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ *e* $\left(\frac{5}{2},3\right)$.

A menor raiz, calculada em primira aproximação, é

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f'(-3)} = -3 + \frac{29}{41} = -\frac{94}{41} = -2,2\cdots$$

2) *Representando por* A *a matriz* $[A^1 A^2 \cdots A^n]$, *a condição de independência é* $|A| \neq 0$. *Considerando o sistema* $AX = B$, *os valores de* λ *serão* $(x'_1, x'_2, \cdots x'_n)$, *solução do sistema.*

4318 — Deduza o desenvolvimento em série de $\log\left(\frac{1+x}{x}\right)$, segundo as potências de $1/x$ e aproveite-o para achar o verdadeiro valor de

$$x\left[x\log\left(\frac{x+1}{x}\right)-1\right] \quad \text{para } x=\infty.$$

R:

$$\log\left(\frac{1+x}{x}\right) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots \qquad |x| > 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left[x\log\left(\frac{x+1}{x}\right)-1\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \cdots - 1\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3x} - \cdots\right) = -\frac{1}{2}.$$

4319 — Considere a função

$$f(x,y) = xy^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y}, \; f(0,0) = 0$$

calcule $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ e mostre que $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$.

Calcule também $f''_{xy}(x,y)$ em qualquer ponto distinto da origem e mostre que esta derivada rectangular é descontínua nesse ponto. Que conclui deste resultado sobre a validade da recíproca do teorema de SCHWARZ? Porquê?

R:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

$$f'_x(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = y^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y}$$

$$f'_y(x,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = 0$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = 0$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = 0$$

Como $f''_{xy}(x,y) = 2y \operatorname{sen}\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}$, *verifica-se que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f''_{xy}(x,y)$ *não existe e portanto* $f''_{xy}(x,y)$ *é descontínua em* $(0,0)$. *A recíproca do teorema de* SCHWARZ *não é verdadeira pois, como se vê, pode dar-se a igualdade das derivadas mistas num ponto sem que* $f''_x(x,y)$ *seja contínua nesse ponto.*

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Época de Julho — (2.ª Chamada) — 19-7-57.

4320 — 1) A função $\Gamma(x)$ verifica a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Utilize-a para provar que $\Delta\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x)$ e para achar a função cuja primeira diferença é $\log x$ (considere $h=1$).

2) Determine m por forma que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0\\ 2x + 3y + z - t &= 0\\ x + 2y - z + t &= 0\\ x + 2y \phantom{{}+z} + mt &= 0 \end{aligned}$$

tenha soluções não nulas. Qual é neste caso o seu grau de indeterminação? Quantas soluções independentes existem?

R: 1) $\Delta\Gamma(x) = \Gamma(x+1) - \Gamma(x) = x\Gamma(x) - \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x)$.

Como $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, *tomando logarítmos em ambos os membros obtem-se* $\log\Gamma(x+1) = \log x + \log\Gamma(x)$ *ou* $\Delta\log\Gamma(x) = \log x$. *A função pedida é pois* $\log\Gamma(x)$.

2) *A condição para que admita soluções não nulas é que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 0$$

o que dá $m = -2$. *Como existe um determinante de 3.ª ordem diferente de zero o grau de indeterminação é* 1, *existindo assim* 1 *solução independente.*

4321 — 1) Determine os valores de α e β por forma que a função $x^6 + \alpha x^5 + \beta x^4$ tenha extremos para $x=2$ e $x=3$. Qual é a natureza desses extremos?

2) Calcule $P\dfrac{x^3}{1+x^2}$ e $Pe^x \cdot x^2$.

3) Desenvolva em série de MAC LAURIN a função $\dfrac{1}{(x+1)\,(x+2)}$ e determine o intervalo onde é válido esse desenvolvimento.

R: 1) *Calculando a derivada* $6x^5+5\alpha x^4+4\beta x^3$, *terá de ser* $\begin{cases} 6\cdot(2)^2+5\alpha\cdot 2+4\beta=0, \\ 6\cdot(3)^2+5\alpha\cdot 3+4\beta=0 \end{cases}$ *sistema que tem a solução* $\alpha=-6$ $\beta=9$.

A segunda derivada $30x^4-120x^3+108x^2$ *é negativa para* $x=2$ *e positiva para* $x=3$. *Assim* $x=2$ *é um máximo e* $x=3$ *um mínimo*.

2) $P\dfrac{x^3}{1+x^2}=P\left(x-\dfrac{x}{1+x^2}\right)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\,log\,(1+x^2)+C$ $\qquad P\,e^x x^2=e^x x^2-2\,P\,e^x x=e^x x^2-2\,(e^x x-P\,e^x)=e^x x^2-2\,e^x x+e^x+C$.

3) $$\frac{1}{(x+1)\,(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=$$
$$=\sum_0^\infty(-1)^n x^n-\sum_0^\infty(-1)^n\frac{x^n}{2^{n+1}}=$$
$$=\sum_0^\infty\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(-1)^n x^n.$$

O intervalo onde é válido o desenvolvimento é $(-1\,,1)$.

4322 – Considere o domínio limitado pela curva simples fechada $\Gamma\equiv\varphi(x,y)=0$, interceptada em dois pontos pela recta $r\equiv\begin{cases} x=\alpha\,t\;(\alpha^2+\beta^2=1). \\ y=\beta\,t \end{cases}$ Sendo $z=f(x,y)$ função diferenciável nesse domínio e constante sobre Γ, prove que a sua derivada ao longo da recta r se anula pelo menos uma vez no domínio considerado.

Sendo k o valor constante assumido por $z=f(x,y)$ sobre Γ, onde está situado $P(a,b)$ se na sua vizinhança se verificam as condições de existência de uma função implícita para a equação $f(x,y)-k=0$?

R: *Sendo* t_0 *e* t_1 *os valores do parâmetro* t *correspondentes à intersecção de* r *com* Γ *tem-se, em virtude da hipótese,* $f(\alpha\,t_0,\beta\,t_0)=f(\alpha\,t_1,\beta\,t_1)$. *A derivada de* $f(x,y)$ *segundo a direcção* r, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\beta$, *anular-se-á (teorema de* ROLLE*) pelo menos uma vez entre* t_0 *e* t_1.

$P(a,b)$ *estará situado sobre* Γ.

Enunciados e soluções dos números 4311 a 4322 de Fernando de Jesus.

ANÁLISE MATEMÁTICA

I. S. C. E. F. – ANÁLISE MATEMÁTICA – **Exame final – 20-7-56.**

4323 – *a*) Faça no integral $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\,\mathrm{sen}^3 x}{(2-\mathrm{sen}^2 x)^2}\,dx$ a mudança de variável definida por $x+y=\pi$ e calcule-o.

b) Estude a convergência de

$$I_n=\int^a\frac{x^n}{\sqrt{a\,x-x^2}}\,dx$$

Estabeleça para I_n uma fórmula de recorrência; relacione I_n com a função Beta; calcule I_0.

R: *Por ser* $dx+dy=0$ *vem*

$$-\int_\pi^0\frac{(\pi-y)\,sen^3(\pi-y)}{[2-sen^2(\pi-y)]^2}\,dy=\int_0^\pi\frac{(\pi-y)\,sen^3 y}{(2-sen^2 y)^2}\,dy=$$
$$=\pi\int_0^\pi\frac{sen^3 y}{(2-sen^2 y)^2}\,dy-\int_0^\pi\frac{y\cdot sen^3 y}{(2-sen^2 y)^2}\,dy.$$

Calculemos $\pi\displaystyle\int_0^\pi\frac{sen^3 y}{(2-sen^2 y)^2}\,dy$ *fazendo* $cos\,y=t$ *monótona no intervalo* $(0,\pi)$; *vem* $-sen\,y\,dy=dt$ *e então o integral transforma-se em*

$$-\pi\int_1^{-1}\frac{(1-t^2)\,sen\,y}{(2-1+t^2)^2}\,\frac{dt}{sen\,y}=$$
$$=\pi\int_{-1}^1\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt=\pi\int_{-1}^1\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt=$$
$$=\pi\int_{-1}^1\frac{dt}{1+t^2}-\pi\int_{-1}^1 t\cdot 2t\,(1+t^2)^{-2}\,dt=$$
$$=\pi\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{1+t^2}+\pi\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_{-1}^{+1}-\pi\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$$

Então, o integral dado, representado por I, *tem o valor*

$$I=\int_0^\pi\frac{(\pi-y)\,sen^3 y}{(2-sen^2 y)^2}\,dy=\pi-I\qquad\text{donde } I=\frac{\pi}{2}.$$

No integral $I_n=\displaystyle\int^a\frac{x^n}{\sqrt{a\,x-x^2}}\,dx$, *quando* x *se aproxima de* a, *a função não se conserva limitada*.

Já o mesmo não sucede quando x *se aproxima de zero, porque sendo regulares o numerador e o denominador, em qualquer intervalo* (a, x), *com a regra de* CAUCHY *tem-se*

$$\lim_{x=0+} \frac{x^n}{\sqrt{a x - x^2}} = \lim_{x=0+} \frac{n x^n}{(a - 2x) \frac{1}{2} (a x - x^2)^{-1/2}} = 0.$$

Atribuindo a função integranda, no ponto zero, o seu valor verdadeiro, isto é, definindo-a com continuidade o integral I_n *só é impróprio devido ao extremo superior* $x = a$.

Sabe-se que

$$\int_a^x \frac{dx}{(a-x)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(a-X)^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right]$$

portanto $\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha}$ *é convergente com* $\alpha < 1$, *divergente com* $\alpha \geqslant 1$.

Daqui se deduzem as seguintes proposições.

Com $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{M}{(a-x)^\alpha}$ *tem-se* $\int_0^a f(x)\, dx$ *convergente se* $\alpha < 1$.

Com $\lim_{x=a} f(x)(a-x)^\alpha = L$ *(finito) e* $\alpha < 1$, *então* $\int_0^a f(x)\, dx$ *é convergente.*

Aplicaremos esta última:

$\lim_{x=a} x^{n-\frac{1}{2}} (a-x)^{\alpha-\frac{1}{2}} = L$ *(finito) se* $\alpha = \frac{1}{2}$ *(qualquer que seja* n*).*

Então, o integral $I_n = \int_0^a x^{n-\frac{1}{2}} (a-x)^{-\frac{1}{2}} dx$ *é convergente.*

Para achar uma fórmula de recorrência, temos

$$I_n = \int_0^a \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a-x}} dx = \int_0^a -2x^{n-\frac{1}{2}} \frac{-1}{2\sqrt{a-x}} dx =$$

$$= \left[-2x^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}\right]_0^a + 2\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{3}{2}}\sqrt{a-x}\, dx$$

$$+ 2\left(n - \frac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{3}{2}}\sqrt{a-x}\, dx.$$

Vem, então

$$I_n = 2\left(n-\frac{1}{2}\right)\int_0^a \frac{(a-x)\, x^{n-\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}} dx =$$

$$= 2\left(n-\frac{1}{2}\right)\int_0^a \frac{a x^{n-1}}{\sqrt{a x - x^2}} dx -$$

$$- 2\left(n-\frac{1}{2}\right)\int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a x - x^2}} dx$$

ou

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} a I_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

Tem-se

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

pondo em I_n, $x = a t$ *vem:* $I_n = \int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}} dx =$

$$= \int_0^1 a^n t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

donde

$$I_n = a^n \cdot \beta\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Calculemos $I_0 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$ *fazendo a mudança de variáveis* $\sqrt{x(a-x)} = x t$ *ou* $x = \frac{a}{1+t^2}$ *cuja derivada é* $\frac{dx}{dt} = -\frac{2at}{(1+t^2)^2}$. *Daqui resulta que a função* $x = \frac{a}{1+t^2}$ *é decrescente de* 0 a $+\infty$ *e, tranforma este intervalo* $(0, +\infty)$ *no intervalo* $(a, 0)$. *Vem, portanto:*

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}} = -\int_{+\infty}^0 \frac{2\, dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\left[\operatorname{artcg} t\right]_0^{+\infty} = 2 \operatorname{artcg} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

4324 — Calcule a área da parede cilindrica do sólido limitado por

$$x^2 + z^2 - 2x = 0 \quad \text{e por} \quad x^2 + z^2 - y^2 = 0.$$

R: $x^2 + z^2 - 2x = 0$ *representa um cilindro de geratrizes paralelas a* $\overrightarrow{OY}$; *podemos pôr* $(x-1)^2 + z^2 = 1$.

A equação $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ *dá com* $y = c$ *circunferências, e representa pois uma superfície de revolução em torno de* $\overrightarrow{OY}$; *como a meridiana é o par de rectas reais* $x^2 - y^2 = 0$, *trata-se duma superfície cónica de revolução em torno de* $\overrightarrow{OY}$.

Os pontos comuns às duas superfícies estão no cilindro $y^2 - 2x = 0$ *(pontos das duas superfícies com a mesma cota* z*) obtido, eliminando* z. *Estes pontos projectam-se, sobre* OXY, *na parábola de equação* $y^2 = 2x$. *Os pontos da parede cilindrica do sólido projectam-se num domínio* Δ *do plano* OXY, *que é o sector determinado na parábola* $y^2 = 2x$ *pela recta* $x = 2$.

Calcule-se a área da parte superior da parede cilindrica. A normal ao cilindro tem parâmetros directores que se vão buscar à equação do plano tangente

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0;$$

$$2(x-1)(X-x) + 2z(Z-z) = 0$$

e são:

$$2(x-1) \qquad 0 \qquad 2z$$

Orientando a normal de modo a ser, do primeiro quadrante, o seu ângulo com $\overrightarrow{OZ}$, *temos os cosenos directores (normal exterior)*

$$\frac{(x-1)}{+\sqrt{(x-1)^2+z^2}},\ 0\ ,\ \frac{z}{+\sqrt{(x-1)^2+z^2}}.$$

Temos, com $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{+\sqrt{(x-1)^2+z^2}}\geqslant 0$.

Finalmente, tem-se

$$A=2\iint_\Delta\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}=2\iint_\Delta\frac{\sqrt{(x-1)^2+z^2}}{z}\,dx\,dy$$

onde $z=+\sqrt{2x-x^2}$, *e* Δ *é o domínio plano atrás indicado.*

$$A=2\iint_\Delta\frac{dx\,dy}{\sqrt{2x-x^2}}=2\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{2x}}^{+\sqrt{2x}}dy=$$

$$=4\int_0^2\sqrt{\frac{2x}{2x-x^2}}\,dx=4\sqrt{2}\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$

$$A=-8\sqrt{2}\int_0^2\frac{-dx}{2\sqrt{2-x}}=16.$$

4325 — Mostre que, se a curva definida por $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ for plana, o Wronskiano

$$W=\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}$$

é nulo.

Prove que, quaisquer que sejam os coeficientes $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0,\ \beta_2,\beta_1,\beta_0,\ \gamma_2,\gamma_1,\gamma_0$, a curva definida por

$$\begin{cases}x=\alpha_2 t^2+2\alpha_1 t+\alpha_0\\ y=\beta_2 t^2+2\beta_1 t+\beta_0\\ z=\gamma_2 t^2+2\gamma_1 t+\gamma_0\end{cases}$$

é plana. Determine o plano da curva. Estude em particular o caso

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\beta_1}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

R: *Se a curva é plana, as funções satisfazem* $Ax+By+Cz+D=0$ *onde* A, B, C *não simultâneamente nulos em nenhum* t *do intervalo considerado; Derivando em ordem a* t, *vem* $Ax'+By'+Cz'+D=0$ *qualquer que seja* t *no intervalo, com* A, B, C *não nulos, sempre os mesmos; as funções* x', y', z' *são linearmente dependentes, no intervalo considerado, e vem a condição bem conhecida* $W(x'\,y'\,z')\equiv 0$.

O plano osculador da curva, é, sempre o mesmo, qualquer que seja t

$$\begin{vmatrix}2\alpha_2 t+2\alpha_1 & 2\beta_2 t+2\beta_1 & 2\gamma_2 t+2\gamma_1\\ 2\alpha_2 & 2\beta_2 & 2\gamma_2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

ou

$$(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)(x-x_0)+(\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2)(y-y_0)+$$
$$+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(z-z_0)=0$$

sendo para isso necessário que um dos menores: $\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1$, $\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2$, $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ *seja diferente de zero. Se são todos nulos, é:* $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\beta_1}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ *e tem-se directamente das equações*

$$\begin{cases}x=\alpha_1(k t^2+2t)+\alpha_0\\ y=\beta_1(k t^2+2t)+\beta_0\\ z=\gamma_1(k t^2+2t)+\gamma_0\end{cases}$$

ou

$$\frac{x-\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{y-\beta_0}{\beta_1}=\frac{z-\gamma_0}{\gamma_1}.$$

4326 — Integre a equação diferencial

$$y'-1=(x-y+1)^2x.$$

R: *É uma equação de* Riccati, *admite visìvelmente o integral particular:* $x-y+1=0$.

Para a resolver faça-se $u=x-y+1$ *e vem*

$$\frac{du}{dx}=1-\frac{dy}{dx}$$

logo

$$-\frac{du}{dx}=u^2x$$

$$-\frac{du}{u^2}=x\,dx \quad \textit{ou} \quad \frac{1}{u}=\frac{x^2}{2}+C$$

e portanto

$$x-y+1=\frac{1}{\frac{x^2}{2}+C}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — **Exame final — 18-10-56.**

4327 — *a*) Calcular o máximo volume dos elipsoides de revolução em torno de $\overrightarrow{OZ}$, cujos eixos somem um comprimento constante.

Indique a dedução da equação dos elipsoides; indique o cálculo do volume de qualquer deles e, em particular, o do volume máximo.

b) Se Δ é um domínio limitado, fechado, cubável, compreendido entre os planos $z=a$, $z=b$, e é cortado por $z=c\ (a\leqslant c\leqslant b)$ em figuras planas quadráveis de área $S(c)$, sabe-se que, o volume de Δ é dado por $\int_a^b S(z)\,dz$.

Enuncie a proposição generalizada ao espaço R_4 e calcule o hipervolume de

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{x_4^2}{b^2}=1\,.$$

R: *Considere-se a elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ *e dê-se a rotação em tôrno de* $\overrightarrow{OZ}$ *obtem-se*

$$x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\quad ou\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\,.$$

O volume é dado por $V=\int_{-b}^{b}\pi a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)dz=$ $=\frac{4}{3}\pi\,a\,a\,b$.

Pondo $2(2a+b)=2K$, *vem*: $b=K-2a$, *e então*: $V=\frac{4}{3}\pi a^2(K-2a)$ *e determina-se o máximo desta função. Tem-se*

$$V'=-8\pi a\left(a-\frac{K}{3}\right)\qquad V''=\frac{8}{3}\pi K-16\pi a\,.$$

Há mínimo para $a=0$ *e máximo para* $a=\frac{K}{3}$

O elipsoide correspondente é: $\frac{x^2}{\left(\frac{K}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{K}{3}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{K}{3}}\right)^2}=1$, *e o volume:* $V=\frac{4}{3}\pi\,\frac{K}{3}\,\frac{K}{3}\cdot\sqrt{\frac{K}{3}}$.

Se Δ *é um domínio de* R_4, *limitado, fechado, mensurável, compreendido entre os hiperplanos* $x_4=a$, $x_4=b$, *e é cortado por* $x_4=c\ (a\leqslant c\leqslant b)$ *em sólidos tridimensionais cubáveis de volume* $V(c)$, *o hipervolume de* Δ *é dado por* $\int_a^b V(x_4)\,dx_4$ (*função* $V(x)$ *integrável no intervalo* (a,b)).

A equação

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{x_4^2}{b^2}=1$$

é um elipsoide de R_4, *de revolução em torno de* OX_4; *os hiperplanos* $x_4=c$ *cortam-no segundo esferas de equação*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)$$

com volume

$$V(c)=\frac{4}{3}\pi\left[a^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\right]^{3/2}.$$

Então, o volume do elipsoide de R_4, *é dado por:*

$$V=\int_{-b}^{b}\frac{4}{3}\pi\left[a^2\left(1-\frac{x_4^2}{b^2}\right)\right]^{3/2}dx_4=$$
$$=\frac{4}{3}\pi a^3\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{x_4^2}{b^2}\right)^{3/2}dx_4$$

Faça-se a substituição $x_4=b\,sen\,\varphi$, *monótona crescente* $(b>0)$ *no intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; *vem*

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{x_4^2}{b^2}\right)^{3/2}dx_4=$$
$$=\frac{4}{3}\pi a^3 b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos^4\varphi\,d\varphi\,.$$

Com integração por partes, tem-se

$$\int cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\left[sen\,\varphi\,cos^3\varphi+\frac{3}{2}\varphi+\frac{3}{4}sen\,2\varphi\right]$$

e finalmente

$$V=\frac{1}{2}\pi^2a^3b$$

A hiperesfera $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=r^2$ *tem um volume dado por*

$$V=\frac{1}{2}\pi^2r^4$$

que se deduz, do anterior, com $a=b=r$.

4328 — *a*) Calcular $\iint_\Delta (x+y-y^2)\,dx\,dy$, sendo Δ limitado por $x=y^2$ e $x+y=1$.

b) Calcule o mesmo integral depois da mudança de variáveis $\begin{cases}u=y^2-x\\ v=y\end{cases}$.

c) em que se transforma o domínio Δ?

d) indique o valor do integral duplo por meio dum integral curvilíneo ao longo da fronteira dum dos domínios, de preferência, do transformado de Δ; indique o sentido do percurso.

e) calcule directamente o integral curvilíneo.

R: *O domínio* Δ *é o sector da parábola* $x = y^2$ *determinado pela recta* $x + y = 1$; *as ordenadas dos pontos de encontro* $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ *que representaremos por* y_0 *e* y_1.

Temos

$$\iint_\Delta (x+y-y^2)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{y^2}^{1-y} (x+y-y^2)\,dx$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y^2 + \frac{y^4}{2}\right) dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^3 + \frac{y^5}{10}\right]_{y_0}^{y_1}$$

Temos $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -1$; *a transformação do plano* (x,y) *no plano* (u,v) *é unívoca, recíproca mas inversa porque o iacobiano é negativo.*

A parábola $x = y^2$ *transforma-se na recta* $u = 0$; *a recta* $x+y=1$ *transforma-se na parábola* $v^2 + v - (u+1) = 0$, *que tem o eixo na recta* $u = -\frac{1}{2}$ *e os seus pontos de* $u = -\frac{5}{4}$ *até* $u = +\infty$.

O domínio Δ *transforma-se, portanto, no domínio* Δ', *que é o sector da parábola* $v^2 + v - (u+1) = 0$ *determinado pela recta* $u = 0$.

O integral duplo, transforma-se em:

$$\iint_\Delta (x+y-y^2)\,dx\,dy = \iint_{\Delta'} (v-u) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \iint_{\Delta'} (v-u)\cdot du \cdot dv = \int_{y_0}^{y_1} dv \int_{v^2+v-1}^{0} du =$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} \left[-v(v^2+v-1) + \frac{(v^2+v-1)^2}{2}\right] dv =$$

$$= \left[\frac{1}{2}v - \frac{1}{4}v^3 + \frac{v^5}{10}\right]_{y_0}^{y_1}.$$

Para indicar o valor com um integral curvilínio, recorre-se à fórmula de Riemann:

$$\iint_\Delta \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\Gamma Q(x,y)\,dy.$$

Vem

$$\iint_{\Delta'} (v-u)\,du\,dv = \int_{\Gamma'} \left(vu - \frac{u^2}{2}\right) dv$$

(Γ' *no sentido directo*).

Calcula-se o integral curvilínio, separando em dois integrais, um ao longo do eixo $\overrightarrow{OV}$ *e faz-se* $u = 0$ *na função, outro ao longo da parábola e faz-se* $u = v^2 + v - 1$ *na função*

$$\int_{\Gamma'} \left(vu - \frac{u^2}{2}\right) dv = \int_{y_0}^{y_1} 0 \cdot dv +$$

$$+ \int_{y_1}^{y_0} \left[v(v^2+v-1) - \frac{(v^2+v-1)^2}{2}\right] dv =$$

$$= \left[\frac{1}{2}v - \frac{1}{4}v^3 + \frac{v^5}{10}\right]_{y_0}^{y_1}.$$

4329 — Resolva a equação diferencial: $yy' - xy'^2 - y'^3 = 0$.

R: $y'(y - xy' - y'^2) = 0$ *donde* $y' = 0$ *o que dá* $y = c$ *e também* $y - xy' - y'^2 = 0$. *Pondo* $y' = p$, *vem:*

$$y - xp - p^2 = 0$$

e derivando em ordem a x: $p - p - x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} = 0$

ou

$$(x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0 \qquad p = c$$

que conduz ao integral geral $y - xc - c^2 = 0$ *e ao integral particular* $y - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 = 0$.

O integral geral da equação proposta é:

$$(y - c)\cdot(y - xc - c^2) = 0$$

Enunciados e soluções dos números 4323 a 4329 de J. Ribeiro de Albuquerque.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — Exame final — (2.ª chamada) — 7-1955.

4330 — Mostre que a característica duma matriz simétrica real é igual ao número de valores próprios significativos dessa matriz.

4331 — Seja $f(z)$ um polinómio de grau n e α um número real ou imaginário diferente de n. Mostre que se todos os zeros de $f(z)$ se encontram no interior duma circunferência C, toda e qualquer raiz z da equação:

$$F(z) = \alpha f(z) - z f'(z) = 0$$

pode pôr-se na forma:

$$z = \frac{\alpha}{\alpha - n}\xi$$

onde ξ é um ponto interior a C.

4332 — Diz-se que o módulo $\mathfrak{M}$ é ligado a $\mathfrak{S}_n$ (grupo simétrico) se para:

a) $m \in \mathfrak{M}$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se tem $m^\sigma \in \mathfrak{M}$.

b) $(m\sigma)\tau = m \cdot \sigma\tau$ com $\tau \in \mathfrak{S}_n$ (associativa).

c) $(m + m')\sigma = m\sigma + m'\sigma$ (distributiva).

d) $m\varepsilon = m$, ε elemento unidade de $\mathfrak{S}_n$.

e) Se os elementos de $\mathfrak{S}_n$ são automorfismos de $\mathfrak{M}$.

f) $z \in \mathfrak{M}$ é simétrico se $z\sigma = z$.

g) $z \in \mathfrak{M}$ é anti-simétrico se $z\sigma = \pm z$ consoante σ é permutação par ou impar.

Provar:

a) z é simétrico se e só se $z\tau = z$ para qualquer transformação τ.

b) z é anti-simétrico se $z\tau = -z$ para qualquer τ.

c) o elemento $\Sigma \pm z\sigma$ com $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ é anti-simétrico.

4333 — Dividir a matriz $\begin{bmatrix} x^2+3 & x & 1 \\ x^3 & 2 & x^2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

pela matriz $\begin{bmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$.

4334 — Partindo do conhecimento da noção de elementos associados mostrar que:

a) se (a, b) e (a, c) são associados da unidade, $(b\,a, b)$ também o é.

b) (a, b) e (a, c) sendo associados também o é $(a, b\,c)$.

c) (a, b) e (c, d) são associados desde que o seja $(a\,c, b\,d)$.

GEOMETRIA SUPERIOR

F. C. P. — Geometria Superior — **Exame final — 7-957.**

4335 — Seja E um conjunto arbitrário, e designem X e Y partes de E^2. Representemos por $X \circ Y$ a totalidade dos elementos (a, b) de E^2 tais que existe em elemento $c \in E$ para o qual $(a, c) \in X$ e $(c, b) \in Y$. Mostrar que é *associativa* a lei de composição assim definida sobre $P(E^2)$.

4336 — Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Mostrar que, sendo f e g dois endomorfismos de E tais que $g \circ f = I$ (I, identidade), então g e f possuem inversas.

4337 — Mostrar que, se uma parte X de um espaço vectorial E é uma variedade linear afim, toda a recta que contem dois pontos distintos de X está contida em X.

4338 — Num espaço vectorial real E chama-se *cone* de vértice x_0 toda a parte X de E que é reunião de semi-rectas, abertas ou fechadas, de origem x_0. Mostrar que, para que um cone C de vértice 0 seja *convexo*, é necessário e suficiente que, quaisquer que sejam x e y em C, se tenha $x + y \in C$.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

119 — Franklin Guerra — **Análise Matricial das Redes e Máquinas Eléctricas,** — 50 págs. Edição do Autor, Braga, 1956.

O presente livro, dedicado a estudantes e engenheiros electrotécnicos, pretende chamar a atenção para a simbiose da electrotecnia e das matemáticas e foi escrito como contríbuto para atulhar, um pouco que seja, o fosso bem largo que em Portugal separa a teoria da prática — diz o Autor.

A seriedade com que se tenta realizar o objectivo exposto, obriga-nos, só por si, a considerar mais uma vez o problema do ensino das matemáticas (o mesmo se pode dizer a respeito da física) aos futuros técnicos e a reconhecer que a política seguida na resolução de tal problema tem contribuído, fundamentalmente,