a regra do produto de determinantes. Diga quais são as propriedades verificadas e deduza que efectivamente se tem

$$\Delta = |a_{ij}| \cdot |b_{jk}| \,.$$

3908 — **Seja $\mathfrak{M}$ um módulo — Ω onde Ω é um corpo satisfazendo à condição de cadeia ascendente. Sabendo-se que o elemento unidade do corpo actua como o automorfismo identidade ($x1 = x$) demonstre**

a) **que se $\mathfrak{M}$ for simples é $\mathfrak{M} = v\,\Omega$ em que $v \neq 0$ é arbitrário e $v \in \mathfrak{M}$**

b) **que se não é simples, é soma directa dum número finito de módulos simples.**

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

SECÇÃO ELEMENTAR

3909 — Provar que

$$(1+\sqrt{3})^n = 6\,(1+\sqrt{3})^{n-2} + 4\,(1+\sqrt{3})^{n-3}$$

3910 — Considere um triângulo equilátero $[A_1, B_1, C_1]$ de área $\mathcal{Q}$. Inscrito no triângulo anterior um novo triângulo equilátero $[A_2, B_2, C_2]$ tal que os seus lados sejam respectivamente perpendiculares aos do anterior. Do mesmo modo e indefinidamente triângulos equiláteros, inscritos nos sucessivos triângulos que se vão obtendo por aquele processo.

Calcule o limite da soma das áreas dos triângulos quando o número destes tende para ∞.

SECÇÃO MÉDIA

3911 — Demonstrar que

$$\frac{d^n(\operatorname{arc\,tg} x)}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \operatorname{arc\,cot} x).$$

3912 — Demonstrar que a correspondência $a + b\sqrt{3} \longleftrightarrow a + b\sqrt{5}$ (a e b racionais) não é um isomorfismo, e provar que não pode existir nenhum isomorfismo entre os corpos $R(\sqrt{3})$ e $R(\sqrt{5})$.

Resoluções dos problemas do concurso, propostos no n.º 56

Apresentou soluções correctas dos n.ºs 3730, 3731 e 3732, que se publicam, o Snr. Fernando de Jesus.

3730

R: *Como* $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ *virá* $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x =$

$= \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \geqslant 0$ *e também é evidente que* $\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} < 2$ *donde se conclui que* $0 \leqslant \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x < 2$ *o que mostra que é impossível a dupla desigualdade proposta.*

3731

R: *Como* $p = \overline{OP} \cos\alpha$ *e* $p = 2\cos A$ *vem*

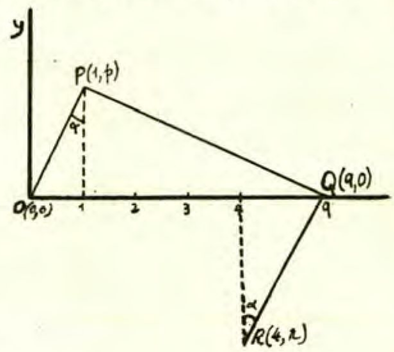
$$\cos\alpha = \frac{2\cos A}{\overline{OP}} = \frac{2\cos A}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{2\cos A}{\sqrt{1+4\cos^2 A}}\,.$$

Conclui-se também que $\overline{QR} = \dfrac{q-4}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{q-4}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$

$= \dfrac{q-4}{\sqrt{1-\dfrac{4\cos^2 A}{1+4\cos^2 A}}} = \dfrac{q-4}{\sqrt{\dfrac{1}{1+4\cos^2 A}}}$. *Então*

$r = \overline{QR}\cos\alpha = \dfrac{q-4}{\sqrt{\dfrac{1}{1+4\cos^2 A}}} \; \dfrac{2\cos A}{\sqrt{1+4\cos^2 A}} =$

$= 2\cos A\,(q-4)$ *e como* $q = 1 + p^2 = 1 + 4\cos^2 A$ *vem* $r = 2\cos A\,(4\cos^2 A - 3) = 2\cos 3A$ *c. q. d.*



3732

R: *Sendo* $x = n$ *(inteiro) e substituindo este valor na função dada vem* $y = n^2 + (2n+1)(n-n) = n^2$ *que é o mesmo valor que se obtém fazendo* $x = n$ *em* $y = x^2$.

Considerando os inteiros consecutivos n *e* $n+1$ *e sendo* $X = n + \theta$ $(0 < \theta < 1)$ *vem para valor correspondente da função:* $Y = n^2 + (2n+1)\,\theta$.

Ora a equação da recta que passa pelos pontos (n, n^2) $[(n+1), (n+1)^2]$ *pertencentes a* $y = x^2$ *é* $Y - n^2 = (2n+1)(X-n)$ *e fazendo* $X = n + \theta$ *vem* $Y = n^2 + (2n+1)\,\theta$.

Fica assim demonstrado que a representação gráfica da equação é uma poligonal inscrita na parábola $y = x^2$ *cujos vertices correspondem aos valores inteiros da variável independente.*

3733 — Não foram apresentadas soluções.