Espaço de Lebesgue

Um exemplo de espaço de RIESZ regular

por Ruy Luís Gomes

Designemos por $\mathcal{F}$ a classe das funções numéricas, limitadas, cujo domínio é um intervalo fechado $[a, b]$.

$\mathcal{F}$ é um espaço de RIESZ.

Na verdade:

1) $\mathcal{F}$ é um espaço vectorial com relação ao corpo dos números reais: a soma das duas funções f_1, f_2 e o produto dum número λ por uma função f verificam as propriedades características de espaço vectorial;

2) $\mathcal{F}$ é um espaço ordenado em que $f_1 \leqslant f_2$ equivale a $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$;

3) Existe o supremo e o ínfimo de duas quaisquer funções de $\mathcal{F}$;

4) $\mathcal{F}$, como espaço vectorial ordenado, verifica as duas implicações

$$f_1 \leqslant f_2 \rightarrow f_1 + f \leqslant f_2 + f,$$

qualquer que seja f, e

$$f_1 \leqslant f_2 \rightarrow \lambda f_1 \leqslant \lambda f_2,$$

para $0 \leqslant \lambda$.

Ora para a construção do integral de LEBESGUE por prolongamento por continuidade a partir do integral de CAUCHY, introduzimos (¹) em $\mathcal{F}$ a *topologia de* LEBESGUE, assim definida: dada uma função qualquer $f_0 \in \mathcal{F}$, toma-se para sistema fundamental da vizinhanças de f_0, a classe dos «intervalos» $[h, g]$, tais que $h \leqslant f_0 \leqslant g$, h superiormente contínua e g inferiormente contínua em $[a, b]$. E entende-se por «intervalo» $[h, g]$ a totalidade das funções f tais que $h \leqslant f \leqslant g$.

Mediante este sistema fundamental de vizinhanças transformamos $\mathcal{F}$ num espaço topológico; $\mathcal{F}$ fica, pois, um espaço vectorial, ordenado, topológico. No entanto, não é um *espaço vectorial topológico*, pois imediatamente se conclue que λf não é uma função contínua no espaço produto da recta euclideana R^1 pelo espaço topológico $\mathcal{F}$.

(¹) Integral de LEBESGUE-STIELTJES, do autor.

Com efeito, dada a função $\lambda_0 \varphi_0$ em que φ_0 é contínua em $[a, b]$, podemos tomar como vizinhança de $\lambda_0 \varphi_0$ o intervalo $[\lambda_0 \varphi_0, \lambda_0 \varphi_0]$, quere dizer, o conjunto reduzido à própria função $\lambda_0 \varphi_0$. E a este intervalo não corresponde em R^1 nenhum intervalo aberto contendo λ_0, tal que $\lambda \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$, nesse intervalo, a não ser no caso trivial de $\varphi_0 \equiv 0$.

Mas é possível demonstrar que $\mathcal{F}$ é um espaço regular, isto é, um espaço que verifica os *dois axiomas:*

1) *as vizinhanças fechadas formam um sistema fundamental de vizinhanças;*

2) *$\mathcal{F}$ é um espaço separado.*

Para isso vamos começar por demonstrar o

TEOREMA I — *A classe $\mathcal{C}$ das funções* f *tais que* $f_1 \leqslant f$, *sendo* f_1 *uma função dada de* $\mathcal{F}$, *é um conjunto fechado.*

Suponhamos, por absurdo, que existe $f_2 \notin \mathcal{C}$ que pertence ao fecho de $\mathcal{C}$. Existirá, então, um ponto x_1 tal que $f_2(x_1) < f_1(x_1)$. Sendo assim é possível determinar k de modo que $f_2(x_1) < k < f_1(x_1)$. Construamos a função g, inferiormente contínua (¹), tal que $g(x_1) = k$, $g(x) = \sup[k, \sup f_2(x_1)]$ para $x \neq x_1$. Qualquer vizinhança $[h, g]$ de f_2, com h arbitrário $\leqslant f_2$, não pode intersectar $\mathcal{C}$, pois se assim fosse de $f_3 \leqslant g$ e $f_1 \leqslant f_3$ resultaria $f_1 \leqslant g$, o que contraria $g(x_1) = k < f_1(x_1)$. Mas se há vizinhanças de f_2 que não intersectam $\mathcal{C}$, f_2 não pertence ao fecho $\mathcal{C}$ e portanto $\mathcal{C}$ é fechado.

COROLÁRIO I — *As vizinhanças* $[h, g]$ *de uma qualquer função* f_0 *são fechadas.*

Na verdade, do Teorema I decorre em primeiro lugar que o conjunto $\mathcal{C}_1$ das funções f tais que $f \leqslant f_1$ também é fechado, pois $f \leqslant f_1$ é equivalente

(¹) A função g é inferiormente contínua visto ser *mínima* em cada ponto de $[a, b]$, por construção.