ANO XIII – N.º 53 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO – 1952

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

*Sobre um teorema de Kakeya**

por ***Fernando Roldão Dias Agudo***

Observação prévia: Para não deixar passar o prazo do concurso o presente trabalho teve de ser dactilografado à medida que se iam encontrando os resultados, o que ocasionou o aparecimento de algumas conclusões em aditamento. Ainda pelo mesmo motivo insere-se na presente publicação um segundo aditamento com resultados que não chegaram a aparecer no trabalho apresentado em Setembro de 1947.

1. O teorema de KAKEYA.

Considere-se o polinómio $f(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+\cdots+p_{n-1} z+p_n \,(p_0\neq 0)$ e designe-se por $\Sigma(\lambda)$, com $\lambda>0$, a expressão

$$\Sigma(\lambda)=\frac{|p_n|}{|p_0|\,\lambda^{n-1}}+\frac{|p_{n-1}|}{|p_0|\,\lambda^{n-2}}+\cdots+\frac{|p_2|}{|p_0|\,\lambda}+\frac{|p_1|}{|p_0|}$$

Se $\zeta\neq 0$ é uma raíz de $f(z)$, de módulo ρ, tem-se

$$-p_0\cdot\zeta^n=p_n+p_{n-1}\zeta+\cdots+p_1\zeta^{n-1}$$

ou

$$-\zeta=\frac{p_n}{p_0\zeta^{n-1}}+\frac{p_{n-1}}{p_0\zeta^{n-2}}+\cdots+\frac{p_2}{p_0\zeta}+\frac{p_1}{p_0}$$

donde

$$\rho\leqslant\Sigma(\rho).$$

Nestas condições se $\rho>\lambda$, é $\Sigma(\rho)<\Sigma(\lambda)$ e portanto $\rho<\Sigma(\lambda)$; se $\rho>\Sigma(\lambda)$, tem-se $\Sigma(\rho)>\Sigma(\lambda)$ e consequentemente $\rho<\lambda$, o que nos permite afirmar:

I. Nenhum zero de $f(z)$ excede em módulo um dos números λ e $\Sigma(\lambda)$ sem ficar inferior ao outro.

I_1. Os módulos dos zeros de $f(z)$ são excedidos pelo maior dos números λ e $\Sigma(\lambda)$ [limite de PERRON] (1). Em particular, pondo $\lambda=1$:

I_2. O maior dos números 1 e $\Sigma(1)=\frac{1}{|p_0|}(|p_n|+|p_{n-1}|+\cdots+|p_1|)$ é limite excedente dos módulos das raízes de $f(z)$.

Multiplicando $f(z)$ por $z-\alpha$ vem

$$g(z)=(z-\alpha)f(z)=p_0 z^{n+1}-(\alpha p_0-p_1)z^n-\cdots-(\alpha p_{n-1}-p_n)z-\alpha p_n=g_0 z^{n+1}+\cdots+g_{n+1}.$$

Se $p_0>p_1>\cdots>p_n>0$, as razões $\frac{p_{i+1}}{p_i}$ são inferiores a algum número $\alpha<1$ e portanto, com esse valor de α,

$$|g_0|=p_0\ ;\quad |g_i|=\alpha p_{i-1}-p_i\quad(1\leqslant i\leqslant n)\ ;\quad |g_{n+1}|=\alpha p_n,$$

o que dá, para $g(z)$,

$$\Sigma(1)=\frac{1}{|g_0|}(|g_1|+\cdots+|g_{n+1}|)=$$
$$=\frac{1}{p_0}(\alpha p_0-p_1+\alpha p_1-p_2+\cdots+\alpha p_{n-1}-p_n+\alpha p_n)=$$
$$=\frac{1}{p_0}[\alpha p_0+\alpha(p_1+\cdots+p_n)-(p_1+\cdots+p_n)]=$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{p_0}(p_1+\cdots+p_n)<\alpha<1$$

e os módulos dos zeros de $g(z)$ não podem atingir a unidade [por I_2]. E como os zeros de $f(z)$ são precisamente os de $g(z)$ (à parte α), segue-se que os zeros de $f(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+\cdots+p_n$ são de módulo inferior à unidade sempre que $p_0>p_1>\cdots>p_n>0$.

Tal é o teorema de KAKEYA.

---

* Trabalho a que foi atribuído o prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira.

(1) Observe-se, porém, que se pode ter $\rho=\lambda$ quando $\lambda=\Sigma(\lambda)$.

2. Algumas generalizações.

O objecto do presente trabalho é estudar alguns casos em que se verifique a igualdade de coeficientes consecutivos de $f(z)$.

Antes de mais, se $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n > 0$, e pondo

$$g(z) = (z-1)f(z) = p_0 z^{n+1} + (p_1 - p_0) z^n + \cdots + (p_n - p_{n-1}) z - p_n$$

tem-se

$$\Sigma(1) = \frac{1}{|g_0|}(|g_1| + \cdots + |g_{n+1}|) = \frac{1}{p_0}[(p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + (p_{n-1} - p_n) + p_n] = 1$$

o que nos permite concluir:

I. As raízes de $f(z)$ não excedem em módulo a unidade, podendo haver raízes de módulo igual a 1 [v, obs. a 1, I_1].

Supondo agora que se tem, mais particularmente,

$$p_0 > p_1 > \cdots > p_k = p_{k+1} > \cdots > p_n > 0$$

vem

$$g(z) = (z-\alpha) f(z) = p_0 z^{n+1} - (\alpha p_0 - p_1) z^n - \cdots - (\alpha p_k - p_{k+1}) z^{n-k} - \cdots - \alpha p_n$$

com

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} < \alpha < 1 \qquad (i \neq k) \quad , \qquad \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$$

e por conseguinte

$|g| = p_0$; $|g_i| = \alpha p_{i-1} - p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n; i \neq k+1)$; $|g_{k+1}| = p_{k+1} - \alpha p_k = (1-\alpha) p_k$; $|g_{n+1}| = \alpha p_n$, o que dá

$$\Sigma(1) = \frac{1}{|g_0|}(|g_1| + \cdots + |g_{n+1}|) = \frac{1}{p_0}[(\alpha p_0 - p_1) + (\alpha p_1 - p_2) + \cdots + (\alpha p_{n-1} - p_n) + \alpha p_n + 2(p_{k+1} - \alpha p_k)] =$$
$$= \frac{1}{p_0}[\alpha p_0 + \alpha(p_1 + \cdots + p_n) - (p_1 + \cdots + p_n) + 2(1-\alpha) p_k] = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}[(p_1 + \cdots + p_n) - 2 p_k].$$

Pode então afirmar-se

II. Se $k \geqslant 1$, $\Sigma(1) = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}(p_1 + \cdots + p_{k-1} + p_{k+2} + \cdots + p_n)$ e as raízes de $f(z)$ continuam, em módulo, inferiores à unidade.

II_1. Se $k = 0$, *i.e.*, $p_0 = p_1 > p_2 > \cdots > p_n > 0$.

$$\Sigma(1) = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}(p_1 + \cdots + p_n - 2p_0) = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}(p_2 + \cdots + p_n - p_0)$$

e pode dizer-se que o módulo das raízes não atinge a unidade quando $\sum_{i=2}^{n} p_i \geqslant p_0$. Quando $\sum_{i=2}^{n} p_i < p_0$ nada se pode afirmar.

Para o trinómio $p_0 z^2 + p_1 z + p_2$ com $p_0 = p_1 > p_2 > 0$ é sempre $\sum_{i=2}^{n} p_i < p_0$ mas é fácil verificar que as raízes não atingem em módulo a unidade.

Com efeito, $\zeta = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4 p_0 p_2}}{2 p_0}$; se $p_1^2 \geqslant 4 p_0 p_2$, o módulo da raíz de maior módulo vem a ser

$$\rho = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4 p_0 p_2}}{2 p_0} < \frac{p_1 + p_1}{2 p_0} = 1;$$

e se $p_1^2 < 4 p_0 p_2$, $\zeta = \frac{1}{2 p_0}(-p_1 \pm i\sqrt{4 p_0 p_2 - p_1^2})$ e

$$\rho = \frac{1}{2p_0}\sqrt{p_1^2 + 4 p_0 p_2 - p_1^2} < \frac{1}{2 p_0}\sqrt{4 p_0^2} = 1.$$

* * *

Prosseguindo na nossa análise, suponha-se que $p_0 > p_1 > \cdots > p_k = p_{k+1} > \cdots > p_l = p_{l+1} > \cdots > p_n > 0$.

Temos, como anteriormente,

$$\frac{1}{|g_0|}(|g_1| + \cdots + |g_{n+1}|) = \frac{1}{p_0}[(\alpha p_0 - p_1) + (\alpha p_1 - p_2) + \cdots + (\alpha p_{n-1} - p_n) + \alpha p_n + 2(1-\alpha)(p_k + p_l)] = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i - 2(p_k + p_l)\right]$$

e as raízes de $f(z)$ mantêm-se interiores ao círculo unitário de centro na origem quando $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p_k + p_l$. É o que sucede, em particular, sempre que $l > k+1 > 1$. Generalizando, podemos afirmar:

III. As raízes de $f(z) = p_0 z^n + \cdots + p_{n-1} z + p_n$ com $p_0 > \cdots > p_k = p_{k+1} > \cdots > p_l = p_{l+1} > \cdots > p_m = p_{m+1} > \cdots = \cdots > p_s = p_{s+1} > \cdots > p_n > 0$ são de módulo inferior à unidade quando se tenha

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p_k + p_l + p_m + \cdots + p_s.$$

A análise que fizémos não nos permite tirar qualquer conclusão quando

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} p_i < p_k + p_l + p_m + \cdots + p_s.$$

Para terminar,

a) Se $p_0 = p_1 = \cdots = p_n > 0$, a equação $f(z) = 0$ pode escrever-se $z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$ e as raízes dispõem-se todas sobre o círculo unitário (porque o produto dos módulos das raízes deve ser 1).

b) $f(z)=p_0 z^n+\cdots+p_{n-1}z+p_n$ com $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n > 0$ terá a raiz -1 quando e só quando n for ímpar e $p_0=p_1 \geqslant p_2=p_3 \geqslant \cdots \geqslant p_{n-1}=p_n$, como imediatamente se reconhece.

3. Aditamento a 2, II_1, e III.

Se $k=0$ podemos escrever

$$\Sigma(1)=\alpha-\frac{1-\alpha}{p_0}(p_2+\cdots+p_n)+1-\alpha=$$
$$=1-\frac{1-\alpha}{p_0}(p_2+\cdots+p_n)$$

e o módulo das raízes é inferior à unidade desde que $n \geqslant 2$.

Do mesmo modo a condição $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p_k+p_l+p_m+\cdots+p_s$ referida em 2, III, pode ser substituída, quando $k=0$, pela condição $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i > p_l+p_m+\cdots+p_s$.

E assim como a 1.ª condição permite concluir que as raízes continuam, em módulo inferiores à unidade se não há mais que dois coeficientes consecutivos iguais e $p_0>p_1$, a 2.ª condição leva-nos a afirmar que tal conclusão subsiste mesmo que $p_0=p_1$, excepto no caso $p_0=p_1>p_2=p_3>\cdots>p_{n-1}=p_n$ (n ímpar) em que $\zeta=-1$.

4. 2.º Aditamento (*)

Como se viu no § 2, podemos escrever, referindo-nos ao polinómio $g(z)=(z-\alpha)f(z)$,

$$\Sigma(1)=\frac{1}{p_0}\left[\alpha p_0+(\alpha-1)\sum_1^n p_i+2\sum_j (p_{j+1}-\alpha p_j)\right]$$

com $\alpha<1$ e desde que se designem com o índice j todos os coeficientes que fazem $\frac{p_{j+1}}{p_j}=1$.

(*) Este aditamento não figurava no trabalho apresentado a concurso.

Temos portanto

$$\Sigma(1)=\alpha+\frac{\alpha-1}{p_0}\sum_1^n p_i+\frac{2(1-\alpha)}{p_0}\sum p_j=$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{p_0}\left[\sum_1^n p_i-2\sum p_j\right]=$$
$$=\alpha+\frac{1-\alpha}{p_0}\left[2\sum p_j-\sum_1^n p_i\right]$$

donde

$$\Sigma(1)<\alpha \text{ quando } \sum_1^n p_i \geqslant 2\sum p_j$$
$$\text{e } \Sigma(1)<1 \text{ quando } \sum_1^n p_i > 2\sum p_j-p_0.$$

A 2.ª condição é mais útil e permite-nos concluir que as raízes de $f(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+\cdots+p_{n-1}z+p_n$ com $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n > 0$ tem módulo inferior a 1 quando

$$\sum_0^n p_i > 2\sum p_j, \qquad i \cdot e \cdot, \qquad \sum p_l > \sum p_j$$

designando por p_l todos os coeficientes seguidos do sinal $>$ e ainda o último e por p_j os coeficientes seguidos do sinal $=$.

Se $\sum p_l=\sum p_j$, $2\sum p_j=\sum_1^n p_i+p_0$ e $\Sigma(1)=1$;

Se $\sum p_l<\sum p_j$, $2\sum p_j>\sum_1^n p_i+p_0$ e $\Sigma(1)>1$

e em qualquer dos casos pode haver — mas não há necessàriamente — raízes de módulo igual a 1. Com $f_1(z)=z^2+z+1$ é $\sum p_l<\sum p_j$ e, para todas as raízes, $\rho=1$; mas com $f_2(z)=8z^3+8z^2+8z+3$ e $f_3(z)=2z^4+z^3+z^2+z+1$ todas as raízes têm módulo inferior à unidade, embora seja $\sum p_l<\sum p_j$ no 1.º caso e $\sum p_l=\sum p_j$ no segundo (1).

(1) As raízes de f_2 são $-1/2$ e $\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{4}$; quanto a f_3 aplique-se o método de Cohn — *Álgebra Superior* — Vicente Gonçalves — 2.º vol., pág. 479.

Matemática pura e Matemática aplicada

por A. Pereira Gomes

Attaché de Recherches du Centre National de la Recherche Scientifique

Entre os aficionados da matemática aplicada e os da matemática pura ouvem-se por vezes discussões, sobre o papel, a importância e as relações mútuas dos dois campos matemáticos, nas quais mais aparente é o menosprezo recíproco (ou o desconhecimento?) do que um real desejo de encontrar uma plataforma de entendimento.

Parece valer a pena tratar deste assunto nas páginas da *Gazeta de Matemática*, onde desde já queremos registar alguns comentários.