I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final (teórico) — Outubro de 1951.

3547 — É dado um sistema holónomo conservativo e de ligações independentes do tempo, sendo F_i a força activa aplicada ao ponto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2 \cdots n)$. Supõe-se que a função de forças U é homogénea de grau -2, em relação às coordenadas dos pontos P_i.

Deduzir do teorema de Cerrutti para os viriais, $\frac{d^2 I}{d t^2} = V + 2T$, que o momento de inércia I, em relação à origem dos eixos, é uma função quadrática do tempo:

$$I = a t^2 + b t + c \qquad (a, b, c \text{ constantes}).$$

3548 — É dada uma força $F(X, Y, Z)$ função apenas das coordenadas do ponto $P(x, y, z)$ sobre o qual actua. Mostrar que, para que exista uma superfície fixa sobre a qual o ponto P está em equilíbrio em todas as posições, é necessário e suficiente que $X dx + Y dy + Z dz = 0$ seja completamente integrável.

3549 — Seja ω o vector velocidade angular, no movimento dum sólido com um ponto fixo. Mostrar que a aceleração dum ponto qualquer do sólido é a soma de dois vectores: 1.° A velocidade que teria o ponto se a velocidade angular fosse $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$; 2.° A aceleração que teria o ponto se a velocidade angular ω fosse constante.

I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final (prático) — Outubro de 1951.

3550 — Um ponto $M(x, y)$ é obrigado a mover-se, sem atrito, sobre a parábola $y^2 = 2px$, e é atraído pelo ponto $A(p, p/2)$ do plano da curva com uma força F, cuja grandeza é função só da distância $\overline{MA} = r$. Mostrar que há uma posição de equilíbrio que é independente da grandeza da força.

3551 — *a*) Mostre que o cóne de revolução homogéneo, limitado pela superfície cónica $x^2 + y^2 = 5z^2$ e de altura $h = 3$, tem pontos focais de inércia. *b*) Determine esses pontos e verifique se as respectivas esferas de inércia se intersectam. (Eixos rectangulares).

3552 — Dado o campo de vectores

$$\vec{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} X = a + bx + cy + dz \\ Y = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z \\ Z = a_2 + b_2 x + c_2 y + + d_2 z \end{array} \right.$$

onde a_i, b_i, c_i, d_i são constantes, será possível determinar essas constantes de modo tal que o campo $\vec{\alpha}$ seja um campo de momentos? Discussão.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar:

3553 — Se na fracção $\frac{16}{64}$ cortarmos no numerador e no denominador o número 6, obtemos, por meio de uma operação incorrecta, um resultado correcto.

Determinar um par de números de dois algarismos (no sistema de base 8), gosando da mesma propriedade.

3554 — Seja $[ABCD]$ um trapésio rectângulo de base paralelos $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = 3a$. Seja $\overline{AD} = a$ o lado perpendicular às bases e consideremos um ponto M sobre o lado $\overline{BC}$. Sejam V_1 e V_2 os volumes dos sólidos gerados pela rotação, de amplitude 2π, do quadrilátero convexo $[ABMD]$ em em torno, respectivamente, de $\overline{AB}$ e de $\overline{AD}$. Determinar a posição de M de modo que $\frac{V_1}{V_2} = \frac{13}{22}$.

Secção Média:

3555 — Representemos por $I(x)$ o maior inteiro contido em x e por $M(x)$ a mantissa de x, isto é $M(x) = x - I(x)$. Demonstrar que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x} \right) = 1$$

se o número de parcelas que figura dentro do parentesis for $I(x)$.

3556 — Estudar as descontinuidades da função definida no intervalo $(-\pi, +\pi)$ pela expressão $y = tg^2 \frac{1}{x}$.

Secção Superior:

3557 — A velocidade dum ponto P tem duas componentes, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, de igual módulo, v; a primeira é constante, a segunda perpendicular, em cada instante, ao vector de posição de P, em relação a uma origem O. Estudar o movimento de P.

3558 — Sejam $r_1, r_2 \cdots r_n$ os zeros *simples* do polinómio $f(z)$ de grau n; provar que $\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{f'(r_i)} = 0$.