

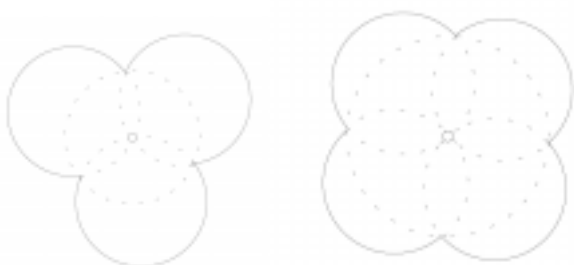
À Volta da Roda

Paulo Ventura Araújo

Centro de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

1. Introdução

Neste artigo discutimos alternativas para a tradicional roda circular. O princípio que nos guia é que, por mais estranhas que sejam as rodas do nosso veículo, não é impossível que ele circule sem solavancos: basta que o faça em pista especialmente adaptada para o efeito. Restringimos a nossa discussão aos *trevos* de três ou mais *folhas*: tratam-se de rodas constituídas por três ou mais arcos de circunferência com o mesmo raio e amplitude, dispostos de modo a que as extremidades desses arcos (que são também os pontos comuns a dois arcos contíguos) fiquem todos situados sobre a mesma circunferência, e o centro desta última circunferência pertença a cada uma das circunferências que contêm os arcos. Na figura abaixo representam-se os trevos de três e quatro folhas.



Uma pista ajustada a estas rodas é uma que permita que o centro da roda tenha movimento rectilíneo; no caso dos trevos, veremos que essa pista é também ela constituída por arcos de circunferência, mas de raio igual

ao dobro do das folhas do trevo. A figura abaixo mostra o trevo de cinco folhas apoiado na respectiva pista, sendo a trajectória do centro dada pela recta a tracejado.



Apresentamos na próxima secção uma prova elementar de que estas pistas proporcionam ao centro do trevo um movimento rectilíneo. Uma outra consideração, não menos importante para o conforto dos passageiros, é que não haja oscilações abruptas de velocidade; e nisto os trevos são francamente desaconselháveis: um motor convencional transmitiria ao eixo do veículo, e portanto à roda, uma velocidade de rotação sem variações bruscas; mas uma velocidade angular uniforme do trevo comunica uma velocidade altamente não uniforme ao seu centro. No caso do trevo de três folhas, por exemplo, a velocidade máxima é o dobro da mínima; e, por cada rotação completa da roda, a velocidade do centro oscila três vezes entre a máxima e a mínima.¹ Este resultado, que por certo

¹ Para que um carro com rodas em trevo de três folhas, cada uma delas com 1,5 m de perímetro, se desloque a uma velocidade média de 100 km/h, estas têm que completar cerca de 22,4 voltas por segundo; isto resulta em mais de 67 oscilações de velocidade por segundo, entre um máximo de 120 km/h e um mínimo de 60 km/h, o que é sem dúvida mortífero.

desencoraja o fabrico em série destes veículos, é demonstrado no final da próxima secção.

Uma pergunta a que respondemos na nossa terceira secção é a de saber em que condições um ponto, ligado rigidamente a um círculo que roda sem escorregar em torno de outro círculo, tem movimento rectilíneo. Mostramos, usando métodos analíticos, que o único caso em que há tal movimento é quando o círculo móvel tem metade do diâmetro do círculo fixo e roda no interior deste; além disso, o ponto deve pertencer à circunferência do círculo móvel. Assim, os trevos que aqui consideramos são, num certo sentido, as únicas rodas *razoáveis* que são limitadas por arcos de circunferência e rodam sem solavancos em pistas também formadas por arcos de circunferência.

As curvas geradas pelo movimento de círculos móveis em torno de círculos fixos recebem o nome de *trocóides*, e foram objecto de uma classificação exhaustiva. Exibimos alguns exemplos de trocóides na nossa última secção, onde fazemos uma breve descrição das *hipociclóides* e *epiciclóides*, que são as trocóides geradas por pontos no perímetro do círculo móvel. Para mais exemplos remetemos o leitor ao recente livro [R] ou ao clássico [T], em especial ao capítulo X deste último.

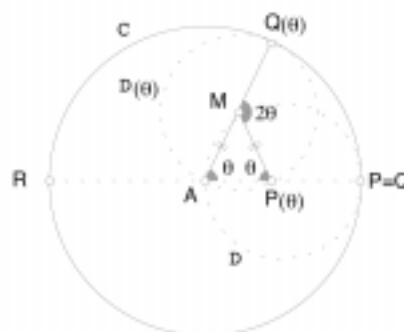
2. Um molho de trevos

Procedemos nesta secção ao estudo dos trevos de n folhas (onde $n \geq 3$) e à construção da respectiva pista. Como dizemos na introdução, os arcos (ou folhas) que constituem os trevos prolongam-se a circunferências que passam pelo centro do trevo, e rodam sobre arcos de circunferência de raio duas vezes maior. Assim sendo, o resultado seguinte é a chave para justificar o movimento rectilíneo do centro.

Proposição. *Suponhamos que C e D são circunferências no plano, a primeira fixa e a segunda rodando interiormente, sem escorregar, em torno da primeira. Se o raio de D for metade do de C, então a trajectória de*

cada ponto de D é um diâmetro de C.

Demonstração. Na figura em baixo, C e D estão inicialmente em contacto no ponto Q de C, e A é o centro de C. Queremos mostrar que a trajectória do ponto P de D que no instante inicial está em Q é o diâmetro \overline{RQ} de C. Dado $\theta \in]-\pi, \pi]$, seja $Q(\theta)$ o ponto de C tal que o arco (orientado) de Q para $Q(\theta)$ tem amplitude θ . Se rodarmos D até contactar com C em $Q(\theta)$, o novo ponto de D em contacto com C limita, com o ponto de contacto inicial P, um arco em D de comprimento igual ao arco $\widehat{QQ(\theta)}$ em C; e, como o raio de D é metade do de C, a amplitude do arco em D é o dobro do arco em C, ou seja 2θ . Assim, quando D ocupa a posição $D(\theta)$ (ver figura), a posição $P(\theta)$ de P é dada pela condição de o arco orientado de $P(\theta)$ para $Q(\theta)$ ter amplitude 2θ . Daqui resulta que $P(\frac{\pi}{2}) = A$ e $P(\pi) = R$; e assim, para mostrar que P(θ) percorre o diâmetro \overline{RQ} , basta, por simetria, considerar o caso em que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.



Já mostrámos que $P(\theta)$ está na semi-recta com origem no ponto médio M do segmento $\overline{AQ(\theta)}$ e que faz um ângulo -2θ com o vector $\overrightarrow{MQ(\theta)}$. Seja T a intersecção dessa semi-recta com a recta RQ , e consideremos o triângulo MTA : o seu ângulo externo em M mede 2θ , e é igual à soma dos seus ângulos internos em T e A ; logo $\angle T = \angle A = \theta$, MTA é isósceles de base \overline{TA} , e T pertence a $D(\theta)$. Temos então $P(\theta) = T$, o que conclui a demonstração. \diamond

Interessa-nos ainda relacionar a *velocidade angular* da circunferência D com a *velocidade escalar* do ponto P . Para isso, observamos que, quando D se desloca da posição inicial para $D(\theta)$, o raio vector do ponto P , que inicialmente é horizontal, vai ocupar a posição $\overline{MP(\theta)}$, o que significa que D sofre uma rotação de $-\theta$. Além disso, a recta $P(\theta)Q(\theta)$ é ortogonal a RQ (o triângulo $MP(\theta)Q(\theta)$ da figura é isósceles, e portanto $\angle MP(\theta)Q(\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$); e daí vemos que, se $0 < \theta < \pi$, o ponto P sofre, desde a posição inicial, um deslocamento $l(\theta) = r - r \cos \theta$, onde r é o raio de C . Suponhamos agora que o movimento de D em torno de C é dado por uma função $\theta = \theta(t)$ do tempo t . Da fórmula anterior obtemos então, para a velocidade do ponto P ,

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = r(\sin \theta) \frac{d\theta}{dt}.$$

Esta fórmula pode ser reescrita de forma mais conveniente se tomarmos o valor absoluto de ambos os seus membros.

Assim, chamando $\omega = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$ à *velocidade angular* de D ,

$v = \left| \frac{dl}{dt} \right|$ à *velocidade escalar* de P , e $\alpha \in [0, \pi/2]$ ao ângulo

(não orientado) entre as rectas AQ e $AQ(\theta)$, temos

$$v = r\omega \sin \alpha, \quad (1)$$

fórmula esta que é válida sem quaisquer restrições em θ .

Logo, mesmo que ω seja constante, a velocidade escalar de P é variável, oscilando entre 0 e $r\omega$.

Vamos agora aos trevos, começando por calcular a amplitude angular de cada uma das suas folhas. Os *vértices* (ou seja, as extremidades dos arcos) de um trevo de n folhas dividem a circunferência que os contém em n partes iguais, e portanto cada par de vértices consecutivos define, com o centro do trevo, um ângulo de $2\pi/n$; e, como o centro pertence à circunferência de cada arco, esse arco tem uma amplitude de $4\pi/n$. Além disso, vê-se sem dificuldade que o ângulo (externo) em cada vértice do trevo é $\pi - 2\pi/n$.



Quanto à pista, ela é constituída por uma infinidade de arcos de raio duplo do das folhas do trevo, dispostos lado a lado horizontalmente; cada arco da pista deve ter comprimento igual ao de uma folha do trevo, e portanto amplitude de $2\pi/n$. Tomamos, como posição inicial do trevo na pista, aquela em que o ponto médio de uma das folhas se apoia no ponto médio de um dos arcos da pista, e portanto o centro do trevo coincide com o centro da circunferência do arco. Nessas condições, a trajectória do centro do trevo é a recta (horizontal) que contém os centros das circunferências dos arcos. De facto, quando o trevo rola até se apoiar num vértice da pista, o ponto de apoio é um vértice do trevo; e, pelo que vimos atrás, a posição do centro do trevo nesse instante é a intersecção da vertical pelo ponto de apoio (ou seja, pelo vértice) com a dita recta horizontal. Além disso, o ângulo entre sucessivos arcos da pista é $\pi - 2\pi/n$, igual àquele entre as folhas do trevo, de modo que, ao rolar, a transição de um arco para o seguinte se faz suavemente.²

Finalmente, relacionamos a velocidade angular do trevo com a velocidade escalar do seu centro (ou, dito de outro modo, com a velocidade a que se desloca o veículo equipado com tais rodas). Chamamos ω à velocidade angular do trevo, que supomos constante, e $r/2$ ao raio das suas folhas; o raio dos arcos da pista é então igual a r . O ângulo α que

² Para sermos francos, há um problema com o trevo de três folhas, pois os ângulos do trevo e da pista são agudos, iguais a $\pi/3$; e, pouco antes de o trevo atingir cada vértice da pista, esse vértice toca e até perfura ligeiramente a folha do trevo em que este se apoiaria quando ultrapassado o vértice. Em rigor, assim, esse trevo não pode ser usado na prática. Mas esse problema não se põe com trevos de quatro ou mais folhas, pois os ângulos em causa são então rectos ou obtusos.

aparece na fórmula (1) é mínimo, igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, quando o

trevo se apoia num dos vértices, e é máximo, igual a $\frac{\pi}{2}$,

quando se apoia no ponto médio de um dos arcos. Assim, por cada arco percorrido, a velocidade v do veículo oscila entre um máximo e mínimo respectivamente iguais a $r\omega$ e

$$r\omega \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right).$$

No caso do trevo de três folhas ($n=3$) o primeiro valor é duplo do segundo; para $n=4$, essa razão baixa para $\sqrt{2}$; quanto maior for n menor será a razão, e o enjoo do passageiro diminuirá proporcionalmente.

3. Trocóides rectilíneas

Uma *trocóide* é a curva descrita por um ponto rigidamente ligado a um círculo móvel que roda sem escorregar em torno de um círculo fixo. O objectivo desta secção é mostrar que as únicas trocóides que são segmentos de recta correspondem ao caso estudado na secção anterior: o ponto gerador pertence ao perímetro do círculo móvel, que roda interiormente no círculo fixo e tem metade do diâmetro deste último.

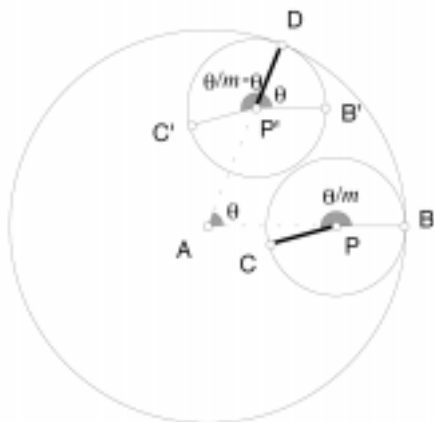


Figura A

Chamamos m à razão entre o raio da circunferência móvel D e o da circunferência fixa C . Convencionamos que m é positivo quando C e D são tangentes interiormente, e negativo no caso de serem exteriores uma à outra; assim, m pode tomar qualquer valor em $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Na figura A encontra-se representado o caso em que $0 < m < 1$: A é o centro de C , B o ponto de tangência inicial, e P o centro de D na sua posição inicial. Vejamos de seguida qual a rotação sofrida por D quando rola até ao novo ponto de tangência D definido pelo ângulo (orientado) θ na figura. O ponto C é tal que o arco orientado \widehat{BC} tem amplitude θ/m ; logo, o comprimento deste arco é igual ao de \widehat{BD} , e C é ponto de D que vai contactar com C em D . Assim, e como ilustra a figura (onde C', P', B' são as imagens de C, P, B por uma mesma translação), D sofre, entre as duas posições, uma rotação de $\theta - \theta/m$; e é fácil de ver que a mesma fórmula se mantém válida quando $m > 1$ ou $m < 0$.

Para prosseguir, supomos que a circunferência fixa C tem raio 1, e fixamos um sistema ortonormal de eixos com origem em A e no qual B tem coordenadas $(1, 0)$. Introduzimos ainda os vectores

$$\vec{u}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \text{ e } \vec{v}(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta).$$

Quando o ponto de tangência completa um arco (orientado) de amplitude θ em C , o centro de D ocupa a posição $P(\theta) = (1-m)\vec{u}(\theta)$.

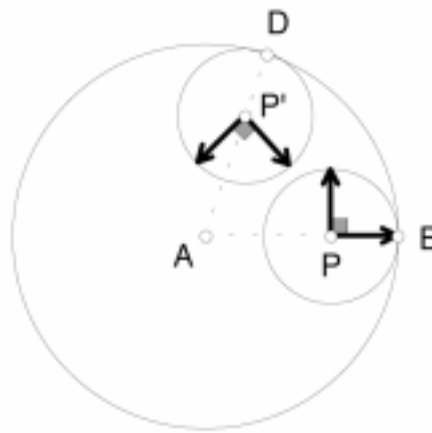


Figura B

Para descrever o movimento de um ponto Q rigidamente ligado à circunferência D , é conveniente tomar um referencial móvel; ou seja, um par de vectores ortonormais, aplicados em $P(\theta)$, que acompanhem o movimento rotativo de D (ver figura B). Uma escolha possível, pelo que vimos dois parágrafos atrás, é o par $\bar{u}(\theta - \frac{\theta}{m})$, $\bar{v}(\theta - \frac{\theta}{m})$. Assim, a equação do movimento de um ponto Q que, no referencial $(P, \bar{u}(0), \bar{v}(0))$, tenha, na posição inicial ($\theta=0$), coordenadas polares ρ, θ_0 (onde $\rho \geq 0$ e $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$) é

$$Q(\theta) = P(\theta) + \rho \cos \theta_0 \bar{u}\left(\theta - \frac{\theta}{m}\right) + \rho \operatorname{sen} \theta_0 \bar{v}\left(\theta - \frac{\theta}{m}\right) \\ = (1-m)\bar{u}(\theta) + \rho \cos \theta_0 \bar{u}\left(\theta - \frac{\theta}{m}\right) + \rho \operatorname{sen} \theta_0 \bar{v}\left(\theta - \frac{\theta}{m}\right). \quad (2)$$

Podemos dar outro aspecto a esta fórmula se exprimirmos $\bar{u}(\theta - \frac{\theta}{m})$ e $\bar{v}(\theta - \frac{\theta}{m})$ à custa de $\bar{u}(\theta)$ e $\bar{v}(\theta)$; mais geralmente, temos

$$\bar{u}(\theta + \varphi) = \cos \varphi \bar{u}(\theta) + \operatorname{sen} \varphi \bar{v}(\theta), \\ \bar{v}(\theta + \varphi) = -\operatorname{sen} \varphi \bar{u}(\theta) + \cos \varphi \bar{v}(\theta),$$

de onde, tomando $\varphi = -\frac{\theta}{m}$ e substituindo em (2), obtemos

$$Q(\theta) = \left[1 - m + \rho \cos\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right)\right] \bar{u}(\theta) - \rho \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right) \bar{v}(\theta). \quad (3)$$

Com esta notação, podemos enunciar o nosso resultado do seguinte modo:

Teorema. *Se o traço da curva $Q(\theta)$ for um segmento de recta então $\rho = m = \frac{1}{2}$.*

A condição $m = \frac{1}{2}$ exprime não só que o raio de D é metade do de C , mas ainda que D rola no interior de C ; a igualdade $\rho = |m|$ é equivalente a que o ponto Q pertença a D . Além de serem necessárias, estas duas condições são,

como vimos na secção anterior, suficientes para que Q tenha movimento rectilíneo. Ressalvamos que a prova do teorema fornece de facto um resultado mais forte: *se falhar alguma das condições enunciadas, então a curva descrita por Q não contém segmentos de recta.*

A demonstração do teorema depende de um lema que fornece uma condição necessária para que o traço de uma curva paramétrica seja um segmento de recta:

Lema. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva duas vezes derivável. Se o traço $\alpha(I)$ for um segmento de recta, então os vectores velocidade e aceleração da curva são linearmente dependentes em cada instante $t \in I$.³*

Demonstração. Seja R um ponto da recta que contém $\alpha(I)$, e $\bar{\omega}$ um versor da mesma recta. Podemos então escrever $\alpha(t) = R + \lambda(t)\bar{\omega}$, onde, uma vez que se tem $\lambda(t) = \langle \alpha(t) - R, \bar{\omega} \rangle$, a função escalar $\lambda(t)$ é também ela duas vezes derivável. Da expressão de $\alpha(t)$ obtemos $\alpha'(t) = \lambda'(t)\bar{\omega}$ e $\alpha''(t) = \lambda''(t)\bar{\omega}$, igualdades estas que mostram que $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são linearmente dependentes. \diamond

Para aplicarmos o lema, temos que calcular as duas primeiras derivadas de $Q(\theta)$. No intuito de facilitar os cálculos, fazemos uso das igualdades

$$\bar{u}'(\theta) = \bar{v}(\theta) \text{ e } \bar{v}'(\theta) = -\bar{u}(\theta),$$

que relacionam os vectores $\bar{u}(\theta)$ e $\bar{v}(\theta)$ com as suas derivadas. Derivando (3), obtemos então

$$Q'(\theta) = \frac{m-1}{m} \left[\rho \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right) \bar{u}(\theta) + \left(-m + \rho \cos\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right)\right) \bar{v}(\theta) \right], \\ Q''(\theta) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \left[\left(\frac{m^2}{m-1} - \rho \cos\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right)\right) \bar{u}(\theta) + \rho \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right) \bar{v}(\theta) \right].$$

³ O mesmo enunciado é válido não só no plano, mas para curvas no espaço euclídiano de qualquer dimensão. Se a curva α for regular (ou seja, se $\alpha'(t)$ nunca for nulo), então a condição descrita é também suficiente para que o traço de α seja rectilíneo; mas não faremos aqui uso desse facto.

Uma vez que $\vec{u}(\theta)$ e $\vec{v}(\theta)$ são linearmente independentes, os vectores $Q'(\theta)$ e $Q''(\theta)$ são linearmente dependentes se e só se a matriz 2×2 formada pelos coeficientes de $\vec{u}(\theta)$ e $\vec{v}(\theta)$ nas fórmulas anteriores tiver determinante zero. O valor desse determinante é

$$d(\theta) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 \left[\left(\rho^2 + \frac{m^3}{m-1} \right) - \rho \frac{m(2m-1)}{m-1} \cos\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right) \right]. \quad (4)$$

Ora, uma expressão do tipo $a+b\cos\varphi$, onde a e b são constantes, só é constante e igual a zero num certo intervalo $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$ se for $a=b=0$. Se supusermos que a curva $Q(\theta)$ contém algum segmento de recta, então, pelo lema, $d(\theta)$ anula-se ao longo de algum intervalo não trivial; e, igualando a zero o termo constante e o coeficiente de

$\cos\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right)$ em (4), obtemos (atendendo a que $0 \neq m \neq 1$) $\rho = m = \frac{1}{2}$. Isto completa a demonstração do teorema. \diamond

4. Hipociclóides e epiciclóides

Retomando a notação e terminologia da secção anterior, as trocóiides geradas por pontos no perímetro do círculo móvel D dizem-se *hipociclóides* se C e D forem tangentes interiormente um ao outro, e *epiciclóides* se o forem exteriormente. De facto, esta nomenclatura (empregue em [T] e em [R]) não é muito feliz na distinção que estabelece, pois, como veremos adiante, as epiciclóides são também hipociclóides (esta observação aparece em [T] mas escapou ao autor de [R]).

Começamos por fixar uma *parametrização* canónica destas curvas. Supomos, como anteriormente, que C tem raio 1 e que $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ é a razão (com sinal) entre o raio de D e o de C , de modo que o raio de D é $|m|$. Se escolhermos um sistema de eixos em que o ponto gerador tenha, na posição inicial, coordenadas $(1,0)$, então a m -

ciclóide (hipociclóide se $m > 0$, epiciclóide se $m < 0$) é dada por

$$F_m(\theta) = (1-m)\vec{u}(\theta) + m\vec{u}\left(\theta - \frac{\theta}{m}\right). \quad (5)$$

Esta equação corresponde ao caso $\rho = |m|$ da fórmula (2) e à escolha, na mesma fórmula, do ângulo $\theta_0=0$ se $m > 0$, e do ângulo $\theta_0=\pi$ se $m < 0$. De seguida estudamos algumas propriedades das m -ciclóides.

Afirmamos que F_m é periódica se e só se m for racional.

De facto, F_m é periódica se e só se existir $\theta_0 > 0$ tal que $F_m(\theta_0) = F_m(0) = (1,0)$, e esta igualdade é equivalente a

que os ângulos θ_0 e $\theta_0 - \frac{\theta_0}{m}$ sejam ambos múltiplos de 2π .

Supondo que é esse o caso, e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \theta_0 = 2k\pi \\ \theta_0 - \frac{\theta_0}{m} = 2k'\pi, \end{cases}$$

obtemos $m = \frac{k}{k-k'}$, e portanto m é racional.

Reciprocamente, se m for racional, escolhemos um inteiro

positivo k tal que k/m seja inteiro; e, tomando $k' = k - \frac{k}{m}$,

verificamos que $\theta_0 = 2k\pi$ satisfaz ambas as equações do sistema, o que significa que F_m é periódica de período $2k\pi$.

Está assim demonstrada a nossa afirmação.

Supomos agora que m é racional, e escrevemos $m = p/q$ na forma irredutível, sendo $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Pelo que acabámos de ver, o menor período positivo de F_m é $2k\pi$,

onde k é o menor natural tal que $\frac{k}{m}$ é inteiro; e, como

$\frac{k}{m} = \frac{qk}{p}$, daqui vemos que $k = |p|$. Isso significa que é

necessário que D complete $|p|$ voltas a C para que o ponto gerador de F_m volte ao local de partida $(1,0)$, e que a imagem da restrição de F_m a qualquer intervalo fechado de comprimento $2|p|\pi$ é toda a curva. Tratamos em seguida

de contar o número de *cúspides*⁴ de F_m , ou seja, o número de pontos distintos que a curva tem em comum com C . Por (5), vemos que $F_m(\theta)$ pertence a C se e só se for

$$\bar{u}(\theta) = \bar{u}\left(\theta - \frac{\theta}{m}\right), \text{ o que é equivalente a } \frac{\theta}{m} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou}$$

ainda $\theta = \frac{2kp}{q}\pi$. Vemos assim que há q cúspides distintas,

correspondentes aos ângulos

$$0, \frac{2p}{q}\pi, \frac{4p}{q}\pi, \dots, \frac{2(q-1)p}{q}\pi. \quad (6)$$

Cada par de cúspides consecutivas (no sentido de distarem um ângulo $\frac{2p}{q}\pi$ uma da outra) limita um arco em F_m , que é portanto constituída por q arcos.

Um fenómeno curioso ocorre se substituirmos em (6) o inteiro p por $p' = q - p$: ignorando a parcela 2π , obtemos a lista

$$0, \frac{-2p}{q}\pi, \frac{-4p}{q}\pi, \dots, \frac{-2(q-1)p}{q}\pi, \quad (7)$$

que corresponde exactamente aos mesmos pontos de (6), uma vez que, para cada $j = 1, \dots, q-1$, se tem

$$\frac{2jp}{q}\pi + \frac{2(q-j)p}{q}\pi = 2\pi, \text{ e portanto}$$

$$\frac{-2jp}{q}\pi \equiv \frac{2(q-j)p}{q}\pi \pmod{2\pi}.$$

A conclusão que tiramos é que, se os parâmetros m e $m' (\neq 0, 1)$ forem *complementares* (ou seja, tais que $m + m' = 1$) e racionais, então F_m e $F_{m'}$ têm exactamente as mesmas cúspides. O que de facto se passa é ainda mais inesperado: F_m e $F_{m'}$ coincidem pontualmente uma com a outra, e isso acontece com qualquer par m, m' de parâmetros complementares, sejam ou não racionais.

Teorema. *Se m e m' forem complementares então F_m e $F_{m'}$ têm o mesmo traço.*⁵

A ideia da prova é fazer uma mudança de variável na parametrização (5) de F_m para a transformar numa expressão semelhante, mas com m' no lugar de m . Essa mudança é de fácil descrição, mas convém motivá-la um pouco. Para esse efeito, restringimo-nos por agora ao caso em que m, m' são racionais e ambos positivos. Nesse caso,

temos $m = \frac{p}{q}$ e $m' = \frac{p'}{q'}$, onde $p + p' = q$ e $p, p' \geq 1$; e

podemos tomar, como *domínios fundamentais* de F_m e $F_{m'}$ (ou seja, que cubram o traço da curva exactamente uma vez), os intervalos $[0, 2p\pi]$ e $[0, 2p'\pi]$, respectivamente.

Para estabelecer uma correspondência bijectiva entre os dois, basta-nos multiplicar a variável θ no primeiro intervalo por $p'/p = m'/m$. Finalmente, comparando (6) e (7), vemos que as mesmas cúspides são percorridas por F_m e $F_{m'}$ por ordens inversas uma da outra, e convém por isso que a mudança de parâmetro reflecta a troca do sentido em que a curva é percorrida. Somos assim levados a considerar a nova variável $\theta' = \frac{-m'}{m}\theta$.

De facto, esta mudança funciona sem qualquer restrição em m, m' : usando a igualdade $m' = 1 - m$, obtemos

$$\theta = \theta' - \frac{\theta'}{m'} \text{ e } \theta - \frac{\theta}{m} = \theta',$$

de onde, substituindo em (5), tiramos

$$F_m(\theta) = F_{m'}(\theta'),$$

o que conclui a prova do teorema.

Nas figuras mostramos algumas m -ciclóides para valores racionais de m ; a curva correspondente a $m = -1$ (ou $m = 2$) é a *cardióide*. Para mais exemplos consultem-se [R] ou o

4 Cúspide é um vértice (ou singularidade) onde dois arcos de uma mesma curva são tangentes um ao outro. Mostra-se sem dificuldade que é esse o caso dos pontos da m -ciclóide que pertencem à circunferência fixa C .

5 Deste teorema resulta em particular que as epiciclóides, que correspondem a parâmetros $m < 0$, são também as hipociclóides com parâmetro $1 - m > 1$ (que se obtêm quando a circunferência móvel tem raio maior que o da fixa).

capítulo X de [T]; a segunda destas referências contém ainda detalhes históricos e um estudo destas curvas abrangendo muitos aspectos não mencionados no presente artigo, e por isso se recomenda especialmente.⁶

5. Referências

[R] John W. Rutter, *Geometry of curves*, CRC Press, 2000.

[T] Francisco Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables - Tome II*, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1909 (reedição Jacques Gabay, Paris, 1995).



$$m = 1/3 \text{ ou } m = 2/3$$



$$m = 2 \text{ ou } m = -1$$



$$m = 3/2 \text{ ou } m = -1/2$$



$$m = 2/5 \text{ ou } m = 3/5$$



$$m = 2/7 \text{ ou } m = 5/7$$



$$m = 3/8 \text{ ou } m = 5/8$$

⁶ O autor deste artigo construiu uma animação no Geometer's Sketchpad que gera todas as m -ciclóides para valores racionais $m=p/q$ com $p, q \in \{1, 2, \dots, 11\}$, e dispõe ainda de uma outra animação com um trevo de n folhas ($3 \leq n \leq 8$) a rolar na sua pista. Quem quiser estas animações é convidado a pedi-las ao autor por correio electrónico (paraujo@fc.up.pt).