raiz da equação será $7m+5k=84$; *como* $84=7\times 12$ *uma solução em números inteiros daquela equação é o par* $m_0=12$, $k_0=0$ *e as soluções gerais serão dadas pelas expressões* $m=12-5p$ $k=7p$ *onde* p *é um inteiro qualquer. Determinando* p *de modo que* $12-5p>0$ *e* $7p>0$ *vê-se que é* $p=1$ *ou* $p=2$ *donde* $m=2$, $k=2$ *ou* $m=7$, $k=1$.

2856 — Determine os valores do parâmetro real k para os quais a equação $kx^2(x^2-1)+5x^4-2x^2+1=0$ admite quatro raizes imaginárias puras. R: *A equação pode escrever-se sob a forma* $(k+5)x^4-(k+2)x^2+$ $+1-0$. *Para que as raizes sejam imaginários puros é necessário que as raizes da resolvente sejam ambas negativas para o que é necessário ser* $\triangle\geqslant 0$ $S<0$ $P>0$; *ou seja* $(k+2)^2-4(k+5)\geqslant 0$; $(k+2:(k+5)<0$ *e* $1:(k+5)>0$. *A primeira desigualdade dá* $k>4$ *ou* $k<-4$; *a segunda dá* $-5<k<-2$ *e a terceira* $k>-5$. *Em resumo terá que ser* $-5<k<-4$.

2857 — Torne irredutível a fracção:

$$(A_p^n-A_{p-1}^n)/A_p^{n-1}$$

R: *Notando que* $A_p^n=n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ $A_{p-1}^n=n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)$ *e* $A_p^{n-1}=(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)(n-p+1)(n-p)$; *obtem-se, pondo em evidência o factor comum* $(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)$

$$\frac{n(n-p+1)-n}{(n-p+1)(n-p)}=\frac{n}{n-p+1}.$$

Aritmética

2858 — Demonstre o teorema:

«Se um número é divisível separadamente por três números primos entre si dois a dois, é divisível pelo produto deles». R: *Seja* N *o número divisível por* a, b *e* c *primos entre si dois a dois. As decomposições em factores primos de* a *de* b *e de* c *existem inteiramente na decomposição de* N; *e como cada uma delas não contém qualquer factor primo que pertença a qualquer das outras, o produto* abc *está inteiramente contido na decomposicão de* N *que é assim divisível por êle.*

2859 — A soma de dois números é 240 e o seu máximo divisor comum é um número inferior a 30.

Calcule os números sabendo que têm *oito* divisores comuns. R: *O* m.d.c. *dos números pedidos deve ser um divisor de* 240. *Os divisores deste números menores que* 30 *são* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 20 *e* 24; *dêstes só* 24 *tem oito divisores e é êle, portanto, o* m.d.c. *dos números pedidos. Se forem* a *e* b *êsses números é* $a=24p$ *e* $b=24q$ *onde* p *e* q *são primos entre si*; *logo* $a+b=24.(p+q)$ *e por isso* $p+q=10$; *então só pode ser* $p=1$, $q=9$ *ou* $p=3$, $q=7$. *Donde as soluções do problema* $a=24$, $b=216$ *ou* $a=72$, $b=168$.

Soluções dos n.os 2845 a 2859 de J. da Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES

MATEMÁTICAS GERAIS — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

I. S. C. E. F. — Matemáticas Superiores — 1.ª cadeira, 2.ª época — Exame final, 2-10-1948.

2860 — Em certo determinante de 3.ª ordem de valor 1, cada elemento a_i^k tem por menor complementar $(-1)^{i+k}\dfrac{i\cdot k}{i+k}$. Quais são os elementos da primeira linha? R: $\begin{cases} a_1^1A_1^1+a_1^2A_1^2+a_1^3A_1^3=1\\ a_1^1A_2^1+a_1^2A_2^2+a_1^3A_2^3=0\\ a_1^1A_3^1+a_1^2A_3^2+a_1^3A_3^3=0\end{cases}$ com

$$|A_i^k|=(-1)^{i+k}\,i\cdot k/(i+k)\quad\begin{cases}1/2\,a_1^1+2/3\,a_1^2+3/4\,a_1^3=1\\ 2/3\,a_1^1+a_1^2+6/5\,a_1^3=0\\ 3/4\,a_1^1+6/5\,a_1^2+3/2\,a_1^3=0\end{cases}$$

e por condensação da matriz

$$\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ \frac{2}{3}&1&\frac{6}{5}&0\\ \frac{3}{4}&\frac{6}{5}&\frac{3}{2}&0\end{matrix}\right\|\rightarrow\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ 0&\frac{1}{9}&\frac{1}{5}&-\frac{4}{3}\\ 0&\frac{1}{5}&\frac{3}{8}&-\frac{3}{2}\end{matrix}\right\|\rightarrow\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ 0&\frac{1}{9}&\frac{1}{5}&-\frac{4}{3}\\ 0&0&\frac{3}{200}&\frac{9}{10}\end{matrix}\right\|$$

$$\frac{1}{2}a_1^1+\frac{2}{3}a_1^2+\frac{3}{4}a_1^3=1,\quad \frac{1}{9}a_1^2+\frac{1}{5}a_1^3=-\frac{4}{3},$$

$$\frac{3}{200}a_1^3=\frac{9}{10}\quad ou\quad a_1^1=72,\ a_1^2=-120,\ a_1^3=60.$$

2861 — Represente geomètricamente a função $y=(a-x)/[(x+a)^2+12ax]$ $(a>0)$. (Dispensa-se a determinação precisa das inflexões). R: Domínio: $(-\infty,-a[7+\sqrt{48}])$, $(-a[7+\sqrt{48}],-a[7-\sqrt{48}])$, $(-a[7-\sqrt{48}],+\infty)$. Traços nos eixos: $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$, $(a,0)$. Assíntotas: $x=-a[7\pm\sqrt{48}]$; $y=0$; *não há assintotas obliquas.* Máximos e mínimos: Máximo $\left(-3a,-\dfrac{1}{8a}\right)$; mínimo $\left(5a,-\dfrac{1}{24a}\right)$. Variação: $-\infty$, *crescente*, $-3a$, *decrescente*, $5a$, *crescente*. $+\infty$. Inflexões: $y''=-(x^3+22ax^2-118a^2x-419a^3)(x^2+14ax+a^2)^{-3}$, *limite excedente das raizes de* y'', $L=7a$; *existe uma inflexão entre* $5a$ *e* $7a$.

A representação gráfica fazia-se, notando que: a) *a ordenada do máximo é tripla da ordenada do mínimo*; b) *a curva não pode ser cortada em mais de três pontos por qualquer recta do seu plano.*

Soluções dos n.os 2860 e 2861 de José R. Albuquerque

I. S. A. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º exercício escrito de revisão — 15-12-48.

2862 — Determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos centros das circunferências que passam pelos pontos $P(1,2)$ e intersectam no eixo dos xx um segmento de comprimento igual a 2. R: *Tem-se* $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ *e* $1+y^2=r^2$ *donde, eliminando* r *se obtém* $x^2-2x-4y+4=0$.

2863 — Determine as equações cartesianas dos lados AC e BC e as coordenadas dos vértices dum triângulo equilátero ABC, tal que, o lado AB está assente sobre a recta de equação $y=x/2$ e o ponto médio de BC é o ponto $(3,3)$.

R: $$r(BC) \equiv y-2=\frac{1-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}(x-3);$$

$$r(AC) \equiv y-\frac{21-\sqrt{3}}{5}=-\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}\left(x-\frac{12-2\sqrt{3}}{5}\right);$$

$$A\left(\frac{18(\sqrt{3}-1)}{5\sqrt{3}},\frac{9(\sqrt{3}-1)}{5\sqrt{3}}\right),\quad B\left(\frac{6+18\sqrt{3}}{5\sqrt{3}},\frac{3+9\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}\right),$$

$$C\left(\frac{12\sqrt{3}-6}{5\sqrt{3}},\frac{21\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}\right).$$

2864 — Determine e equação cartesiana do lugar geométrico dos simétricos do ponto $(2,0)$ em relação à família de rectas $y=(1+K)x+(1+K)$. R: *Coordenadas do ponto médio* $(X+2)/2, Y/2$, *logo* $Y/2=(1+K)(X+2)/2+(1+K)$ *e* $Y/2=-(X-2)/2(1+K)$ *donde eliminando* K *se obtém* $X^2+Y^2+2X-8=0$.

Enunciados e soluções dos n.os 2862 a 2864 de F. A. Carvalho Araújo.

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA — Exames de frequência de 1948.

2865 — Mostre que a função de z_1, z_2, z_3

$$u=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

é simétrica, e exprima o seu valor em função racional das funções simétricas elementares de z_1, z_2, z_3.

2866 — Designando por α uma das raizes da equação z^3-z-1, determine um polinómio $p(z)$, de coeficientes racionais e de grau inferior a 3, tal que $p(\alpha)=(\alpha^2+1)/(\alpha-1)$. Enuncie e demonstre o teorema que intervém nesta questão. R: $(z^3-z-1)/(z-1)\equiv z^2+z-1/(z-1)$, *donde* $1/(\alpha-1)=\alpha^2+\alpha$ *e* $(\alpha^2+1)/(\alpha-1)=(\alpha^2+1)(\alpha^2+\alpha)=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha=(\alpha^3-\alpha-1)(\alpha+1)+2\alpha^2+2\alpha+1=2\alpha^2+\alpha+1$.

2867 — Mostre que as substituições sobre $z_1, z_2, \cdots, z_n$ que deixam invariante uma dada função destas variáveis formam um grupo. Determine o grupo H a que pertence a função $u=z_1z_2+(z_3+\varepsilon z_4+\varepsilon^2 z_5)^3$, designando por ε uma raiz cúbica primitiva da unidade. É o grupo H cíclico? Indique os seus subgrupos.
R: z_1z_2 *pertence ao grupo* $\{I, (12)\}$; $(z_3+\varepsilon z_4+\varepsilon^2 z_5)^3$ *pertence ao grupo gerado pelo ciclo* (345): *a funcão dada pertencerá ao grupo*

$$H=\{I, (12), (345), (543), (12)(345), (12)(543)\}$$

pois que os índices duma das parcelas são distintos dos da outra. O grupo é cíclico: é gerado pela substituição $\sigma=(12)(345)$. *Os subgrupos de* H *são:* $\{I\}$, H, *o grupo gerado por* σ^2 *e o grupo gerado por* σ^3.

2868 — Considere uma função $u=\varphi(z_1, z, \cdots z_n)$ e um grupo G qualquer de substituições sobre os zz. Sendo u_i, u_k, duas quaisquer funções conjugadas de u em G, deduza a expreesão geral das substituições de G que fazem passar de u_i para u_k. O que conclui no caso $i=k$?

2869 — Defina o conceito do isomorfismo entre grupos. Mostre que os grupos das funções $u=(z_1-z_2)(z_3-z_4)$, $v=z_1z_3$ (consideradas ambas como funções de z_1, z_2, z_3, z_4) são isomorfos e estude-os do ponto de vista da transitividade. R: *A função* u *pertence ao grupo* $G=\{1, (12)(34), (14)(23), (13)24)\}$; *a função* v *pertence ao grupo* $\overline{G}=\{I, (13), (24), (13)(24)\}$. *Entre* G *e* $\overline{G}$ *pode definir — se o isomorfismo:* $I \leftrightarrow I$, $(12)(34) \leftrightarrow (13)$, $(14)(23) \leftrightarrow (24)$, $(13)(24) \leftrightarrow (13)(24)$. G *é transitivo, mas* $\overline{G}$ *é intransitivo, pois admite os sistemas de transitividade* $\{1,3\}$ *e* $\{2,4\}$.

Soluções resumidas dos n.os 2865 a 2869 do estudante António César de Freitas.

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA — Exame final de 1948 — 2.ª época.

2870 — Defina os conceitos de isomorfismo e automorfismo entre corpos e prove que o corpo racional admite como único automorfismo a identidade.

2871 — Enuncie o critério geral de resolubilidade por meio de radicais e exponha a marcha da resolução algébrica duma equação metacíclica. Verifique se a equação $z^4+z^3+3z-3=0$ é ou não resoluvel por meio de radicais quadráticos. R: *Considerando a função das raizes* $u_1=z_1, z_3+z_2z_4$ (*pertencente ao grupo do quadrado*, Q_4) *e a equação* $g(u)=u^3+14u-1=0$ (*resolvente de Ferrari da proposta*), *o facto, facilmente verificável, de que esta equação não tem raizes racionais, garante que* Q_4, *e portanto os seus conjugados, não são grupos admissíveis de* $g(u)=0$ *a respeito de* Ra. *Ora além destes grupos, o único subgrupo máximo de* S_4 $(\neq S_4)$ *é o grupo alternante* A_4; *mesmo que este grupo fosse admissível, não o poderia ser* $A_4 \cap Q_4$, *e, como* *na sua cadeia de composição intervém o índice* 3, *seria inevitável a introdução dum radical cúbico. A equação proposta não é pois resoluvel por meio de radicais quadráticos.*

2872 — Demonstre que a equação $z^n = a$ é cíclica a respeito de todo o corpo que contenha o número a e uma raiz primitiva de índice n de unidade (n inteiro e maior que zero).

Nota: Considera-se aqui como cíclica toda a equação cujo grupo de Galois é um subgrupo de algum grupo cíclico transitivo.

2873 — Diga o que se entende por raiz duma equação com coeficientes variáveis.

2874 — Definição axiomática de grupo. Verifique se o conjunto P dos números positivos forma ou não um grupo a respeito da potenciação, isto é, a respeito da operação θ assim definida: $x\theta y = x^y$. É a operação θ associativa? É invertível? R: *A operação* θ *é unívoca, mas não associativa, visto que* $(x^y)^z = x^{yz}$, $x^{(y^z)} = x^{y^z}$; *não se tendo geralmente* $x^{yz} = x^{y^z}$. *O conjunto* P *não é portanto um grupo a respeito de* θ. *Esta operação não é invertível, pois que a equação* $a\theta x = b$ *não admite solução em* P, *sempre que se tenha conjuntamente* $a < 1$ *e* $b \geqslant 1$ *ou* $a > 1$ *e* $b \leqslant 1$, *mas é de notar que* θ *é invertível à esquerda.*

Soluções resumidas do estudante Jaime Campos Ferreira.

CÁLCULO INFINITESIMAL E DAS PROBABILIDADES

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — 1.º Exercício escrito de revisão — 15-12-1948.

2875 — Seja π_1 o plano que passa por $P(1,1,1)$ e é paralelo aos dois vectores $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$; e π_2 o plano definido por $A(1,0,1)$, $B(0,1,0)$ e $C(0,0,1)$. Determine a equação do plano que passa pela origem das coordenadas e é perpendicular à intersecção de π_1 e π_2. R: $2x-y-z=0$.

2876 — Se os complexos $w = u+iv$ e $z = x+iy$ estiverem relacionados pela igualdade $w = -i(z-1)/(z+1)$, mostre que o complexo w se encontra no semi-plano dos vv positivos quando z é interior ao círculo de centro na origem e raio 1. R: *De* $w = -i(z-1)/(z+1)$ *vem* $z = (i-w)/(w+i)$.

Ora $|z| < 1$ *implica* $|w-i| < |w+i|$, *o que demonstra o que se pretendia, se notarmos que esta última desigualdade significa que a imagem de* w *dista menos da imagem de* i *do que da imagem de* $-i$.

2877 — Duas circunferências de centros $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, respectivamente, passam pela origem. Determine o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a cada uma das circunferências tem soma constante e igual a $2a$. R: *Se for* P *um ponto genérico do lugar geométrico, a soma das suas distâncias aos centros das circunferências é constante e igual a* 4a, *o que permite concluir que o lugar procurado é a elipse de equação* $x^2/4a^2 + y^2/3a^2 = 1$.

Enunciados e soluções dos n.os 2875 a 2877 F. R. Dias Agudo.

F. C. P — Cálculo das Probabilidades — Julho de 1948.

2878 — Um dado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado ao acaso uma ou mais vezes — tantas quantas as unidades do ponto obtido no 1.º lançamento.

a) Calcular a probabilidade de tirar a soma de pontos 10 (no conjunto de todos os lançamentos).

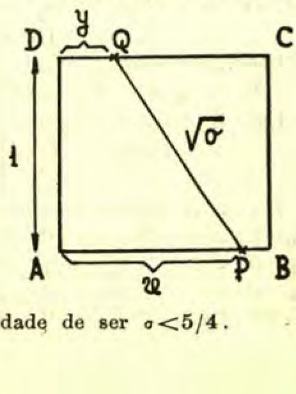
b) Obteve-se essa soma. Calcular a probabilidade de no primeiro lançamento ter saído um ponto ímpar. [Utilizar em parte a análise combinatória]. R: *a*) Maneiras de obter a soma 10 — pontos obtidos nos vários lançamentos. R: a) *Maneiras de obter a soma* 10 — *pontos obtidos nos vários lançamentos*:

1.º lançamento	Restantes lançamentos	N.º de combinações	Probabilidades
3	1–6	2	$6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$
	2–5	2	
	3–4	2	
4	1–1–4	3	$10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4$
	1–2–3	6	
	2–2–2	1	
5	1–1–1–2	4	$4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5$

$$\therefore \quad (A) = \frac{280}{6^5} = \frac{35}{972}$$

$$\text{b)}\quad (I\,|\,A) = \frac{(IA)}{(A)} = \left(\frac{6}{6^3}+\frac{4}{6^5}\right) : \frac{280}{6^5} = \frac{220}{280} = \frac{11}{14}.$$

2879 — Dois pontos P e Q são lançados ao acaso sobre os dois lados opostos AB e CD de um quadrado.



Seja σ o quadrado da distancia dos dois pontos obtidos:

$$\sigma = \overline{PQ}^2.$$

a) Indicar o domínio certo de σ, justificando, e calcular o valor médio dessa variável.

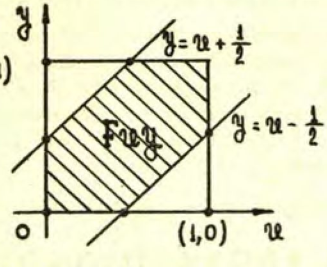
b) Calcular a probabilidade de ser $\sigma < 5/4$.

R: *a*) $N\sigma\,(1,2)$ $\sigma=1+(x-y)^2$; $T_{xy}=T_x\cdot T_y=1$;

$M(\sigma)=\iint(1+(x-y)^2)\,dx\,dy=\frac{7}{6}$.

b) $1+(y-x)^2<5/4 \quad \therefore \quad (y-x)^2<1/4$

$\therefore\ |y-x|<1/2 \quad \therefore \quad -1/2<y-x<1/2$



$\therefore\ \begin{cases} y>x-1/2 \\ y<x-1/2 \end{cases}$ (região tracejada).

$T_{xy}=1 \quad \therefore \quad (A)=F_{xy}/N_{xy}=1-2\cdot 1/2\cdot(1/2)^2=3/4$.

2880 — A força electromotriz de um elemento termoeléctrico, para uma dada diferença de temperatura t entre os polos, pode ser representada pela equação

$$e/t=A+B\cdot t.$$

São dados os seguintes pares de valores:

t	e/t
50°	0,000.243
100	248
150	254
200	268

Supor igualmente precisos os valores de e/t.

a) *b*) Determinar os valores mais plausíveis das constantes A e B, e avaliar os correspondentes erros pelo método das medições indirectas.

c) *d*) Efectuar a compensação desses quatro valores de e/t, e avaliar os erros desses valores compensados.

R: *Para simplificar os cálculos numéricos, começar por fazer a transformação*

$$A=A'+0{,}000.243,\quad B=B'/50.$$

$$\therefore A'+B'\cdot t/50=e/t-0{,}000.243$$

$$\therefore 10^6 A'+10^6 B'\cdot t/50=10^6\cdot e/t-243$$

Tomamos

$$u=10^6\cdot A'=10^6\cdot A-243,\quad y=10^6\cdot B'=5\cdot 10^7 B,$$

Os 2.os membros das quatro equações das medições são igualmente precisos.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — FÍSICA MATEMÁTICA — **Outubro de 1948.**

2881 — Reconhecer se será possível incluir nos casos de separação de variáveis que conhece um problema de Dinâmica em que é

$$2T=\alpha^2\cdot\alpha'^2+\alpha^2\beta^2\cdot\beta'^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdot\gamma'^2,\qquad U=\beta^2/\alpha^2.$$

Se for, indicar um modo de fazer essa inclusão. R: *Tomemos* $q^1=\alpha$, $q^2=\beta$, $q^3=\gamma$.

a) *Caso de* Liouville:

$$2T=B\cdot(A_\alpha\cdot\alpha'^2+A_\beta\cdot\beta'^2+A_\gamma\cdot\gamma'^2$$

$$A_\alpha/\alpha^2=A_\beta/\alpha^2\beta^2=A_\gamma/\alpha^2\beta^2\gamma^2\ \therefore\ A_\alpha/A_\gamma=$$

$$=A_\alpha(\alpha)/A_\gamma(\gamma)=1/\beta^2\gamma^2$$

(dependente de β — inclusão impossível).

b) *Caso de* Staeckel:

$$2T=\alpha'^2/\psi_\alpha+\beta'^2/\psi_\beta+\gamma'^2/\psi_\gamma\ \therefore\ \psi_\alpha=1/\alpha^2,\ \psi_\beta=1/\alpha^2\beta^2,$$

$$\psi_\gamma=1/\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Condições — com

$$X_\alpha=X_\alpha(\alpha),\quad X_\beta=X_\beta(\beta),\quad X_\gamma=X_\gamma(\gamma):$$

$$1/\alpha^2\cdot X_\alpha+1/\alpha^2\beta^2\cdot X_\beta+\\ +1/\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdot X_\gamma=\begin{cases}0 & (\textit{duas}\ \text{soluções})\\ 1 & (\textit{uma}\ \text{solução})\\ \beta^2/\alpha^2 & (\textit{uma}\ \text{solução}).\end{cases}$$

É possível determinar essas soluções, vindo:

$\varphi_{11}=1$, $\varphi_{12}=-\beta^2$, $\varphi_{13}=0$ (Soluções linearmente in-
$\varphi_{21}=0$, $\varphi_{22}=1$, $\varphi_{23}=-\gamma^2$ dependentes da 1.ª eq.).
$\varphi_{31}=\alpha^2$, $\varphi_{32}=0$, $\varphi_{33}=0$ (Solução da 2.ª eq.).
$U_1=0$, $U_2=\beta^4$, $U_3=0$ (Solução da 3.ª eq.).

2882 — Verificar que é *completo* de o sistema equações $x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$, $x_2\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$.

Determinar um integral desse sistema pelo método de *Mayer*.

Escrever o integral geral. R: a) *Resolvamos em ordem a duas das derivadas:*

$$\begin{cases} X_1(f)\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x_1}-\dfrac{x_1}{x_2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0\\[2mm] X_2(f)\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+\dfrac{x_3}{x^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0.\end{cases}$$

$$X_1X_2(f)-X_2X_1(f)\equiv\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_3}{x_2^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}-$$

$$-\frac{x_3}{x_2}\cdot\frac{x_1}{x_2^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}\equiv 0$$

(*o sistema é* completo).

b) *Os coeficientes das novas equações são holomorfos na vizinhança do ponto* $x_1=x_3=0$, $x_2=1$.

Façamos a mudança de variáveis

$$x_1=y,\quad x_3=yu,\quad x_2=x_2.$$

Equação a considerar do sistema transformado:

$$Y(F)\equiv\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{u^2(y-1)}{x_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}=0.$$

Equação diferencial associada:

$$x_2\,dx_2=(u^2-1)\,y\,dy \;\therefore\; x_2^2=(u^2-1)\,y^2+C(u)\,.$$

Integral da equação $Y=0$:

$$F(y\mid u\mid x_2)=x_2^2+(1-u^2)\,y^2\,.$$

$F(0\mid u\mid x_2)=x_2^2$ *não depende de* u, *portanto trata-se de um integral do sistema completo.*

Regresso às primitivas variáveis:

$$f=x_1^2+x_2^2-x_3^2\,.$$

c) *Integral geral:*

$$f=\Theta\,(x_1^2+x_2^2-x_3^2)\,.$$

2883 — Um ponto pesado P move-se sem atrito sobre uma linha fixa de extremos nos pontos

$$O\,(0\,,0\,,0) \quad \text{e} \quad A\,(1\,,0\,,0)\,,$$

sob a acção de uma força *constante* normal ao plano Oxz.

Parte de O com velocidade nula e pretende-se determinar essa linha de modo a atingir A o mais ràpidamente possível.

Reduzir à determinação da trajectória de um ponto material livre num campo dado. R: *Tomemos*

$$U=may-mgz\,.$$

De

$$2T=2\,(U+E)=2\,(may-mgz+E)$$

resulta (*ponto* O) $E=0$.

$$\therefore\; v^2=2\,(ay-gz)\,.$$

$$t_{OA}=\int_{OA}\frac{ds}{v}=\int\frac{ds}{\sqrt{2\,(ay-gz)}}\,,\quad \delta t_{OA}=0\,.$$

Princípio da acção estacionária, para um ponto P' *de massa* $m'=1$:

$$A=\int\sqrt{2\,(U'+E')}\,ds\ \ (S=s)\,,\quad \delta A=0\,.$$

Pondo de lado um factor numérico constante e fixando $E'=0$, *será*

$$U'=\frac{1}{ay-gz}\,.$$

Equações de movimento do ponto P':

$$x''=\frac{\partial U'}{\partial x}=0\,,\quad y''=\frac{\partial U'}{\partial y}=-\frac{a}{(ay-gz)^2}\,,$$

$$z''=\frac{\partial U'}{\partial z}=\frac{g}{(ay-gz)^2}\,.$$

Resultam imediatamente três integrais primários:

$$x'=\alpha\,,\quad gy'+az'=\beta\,,$$

e o integral da força viva, que tem a constante de integração fixada $(E'=0)$

$$x'^2+y'^2+z'^2=2/(ay-gz)\,.$$

Só teremos de reter as equações das trajectórias que se obtêm eliminando t:

$$\left\{\begin{array}{ll} y'=\dfrac{dy}{dx}\cdot\alpha \quad \therefore & \alpha\left(g\dfrac{dy}{dx}+a\dfrac{dz}{dx}\right)=\beta \\[2ex] z'=\dfrac{dz}{dx}\cdot\alpha & \alpha^2\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]=\dfrac{2}{ay-gz} \end{array}\right.$$

$\alpha\neq0$, *porque* x *não pode ser constante.*

A 1.ª equação integra-se imediatamente, vindo

$$gy+az=0$$

depois de obrigar a trajectória a passar por O *e* A, *o que fixa* β *e a nova constante de integração.*

A última equação dá a outra equação da trajectória, mediante uma quadratura; ficam fixados α^2 *e a nova constante de integração.*

Enunciados e soluções dos n.os 2881 a 2883 de Manuel Gonçalves Miranda.

CRÍTICA DE LIVROS

LIÇÕES DE ÁLGEBRA SUPERIOR E GEOMETRIA ANALÍTICA, (Tomo I)

por **Arnaldo Madureira** (*Professor catedrático da Faculdade de Ciências do Porto*)

Durante largos anos a preparação dos estudantes das nossas Escolas Superiores, tanto para as aulas como para os exames, fez-se pela «sebenta».

Ùltimamente, porém, esta prática tem sido substituída pela publicação das lições, sob a imediata responsabilidade dos próprios professores.

Ora, é precisamente um livro deste tipo que neste momento nos cabe analisar e, sendo assim, o que interessa, acima de tudo, é esclarecer em que medida a Universidade atinge através dele o objectivo fundamental de fornecer aos estudantes de Álgebra um bom manual de trabalho e um valioso elemento de consulta, tudo isso avaliado à luz de um critério actual do que deve ser o ensino superior daquela disciplina.

Dentro desta orientação, destacaremos os três pontos seguintes: *prefácio, introdução e segunda parte.*

Prefácio. Diz-se nele, textualmente: «Ao publicarmos este trabalho, temos apenas em vista prestar um serviço aos nossos alunos, fornecendo-lhes um compêndio que lhes permita seguirem fàcilmente as nossas lições, sem precisarem de distrair a atenção na recolha de apontamentos nem *perderem* tempo na consulta de vários livros, em que decerto encontrariam tratados os mesmos assuntos».

E a reforçar esta afirmação, logo no período seguinte se acrescenta, à maneira de implicação: «Não se trata, portanto, de um livro com pretensão de originalidade,