para o estudo da espectroscopia nuclear» foi discutida pelos professores Dr. A. Cyrillo Soares da Universidade de Lisboa e Dr. Mário Silva da Universidade de Coimbra. Dos pontos — Teoria das valências orientadas — e — Ondas electromagnéticas; sua propagação. Teorema de Poyting. Estudo do campo de irradiação do dipolo de Hertz — foram argüentes respectivamente os Professores Drs. Couceiro da Costa e Mário Silva, da Universidade de Coimbra.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

Nos dias 25 e 26 de Junho tiveram lugar nêste Instituto as provas de doutoramento em Ciências Económicas e Financeiras do assistente João Remy Freire. A dissertação «Estudos de Demografia Portuguesa — 1.º ensaio» foi discutida pelos Professores Bento Caraça e Francisco Leite Pinto. As teses foram discutidas pelos Professores C. M. Beirão da Veiga e A. Marques Guedes.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

SÔBRE INEQUAÇÕES FRACCIONÁRIAS DO 1.º GRAU

*por **Raúl Rato***

Estas inequações têem sido tratadas de formas muito variadas nos compêndios de Álgebra elementar. Serrasqueiro (1883) não as considera em especial; resolvendo $\frac{x-1}{x+3} > \frac{4}{5}$ acha $x > 17$, o que é incompleto. A. J. da Cunha (1883) não as considera. Albuquerque (1898) desembaraça de denominador, tomando o quadrado, sempre positivo. Dias Agudo (1938) resolve-as com as hipóteses usuais na resolução das inequações fraccionárias do 2.º grau. Sequeira Ribeiro (*s/d.* prog. de 1936) faz considerações muito complicadas.

Ora estas inequações têm uma resolução muito simples, se aplicarmos o mesmo raciocínio que nos dá os valores de x que tornam o trinómio do 2.º grau positivo ou negativo, no caso das raízes reais e desiguais. Com efeito tôda a inequação fraccionária do 1.º grau pode reduzir-se à forma $f(x) > 0$, ou $f(x) < 0$, dando-se a $f(x)$ a expressão:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \times \frac{x+b/a}{x+d/c}$$

Mostra esta expressão que $f(x)$ será de sinal contrário a a/c para valores de x compreendidos no intervalo $(-b/a\,,\ -d/c)$ e do mesmo sinal de a/c para valores não compreendidos no mesmo intervalo.

Alguns exemplos tirados dos autores referidos:

Serrasqueiro: $\frac{x-1}{x+3} > \frac{4}{5}$.

Façamos $f(x) > 0$ $\frac{x-1}{x+3} - \frac{4}{5} > 0$ ou $\frac{1}{5} \times \frac{x-17}{x+3} > 0$ o que dá a solução: $x > 17$ ou $x < -3$, isto é, fora do intervalo $(17\,,\ -3)$.

Albuquerque: $\frac{1}{4} - \frac{5}{8x} < 1 + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{4} - \frac{5}{8x} - 1 - \frac{1}{x} < 0$ ou $\frac{-6x-13}{8x} < 0$. Solução $x > 0$ ou $x < -13/6$.

Sequeira Ribeiro: $\frac{x-1}{x+1} < 1$, $\frac{x-1}{x+1} - 1 < 0$, $\frac{-2}{x+1} < 0$ ou $x > -1$.

Idem: $\frac{3x^2-4x}{x^2+3} < 3$, $\frac{3x^2-4x}{x^2+3} - 3 < 0$ ou $\frac{-4x-9}{x^2+3} < 0$, $x > -\frac{4}{9}$.

Dias Agudo: $\frac{x+1}{x-3} > 0$ dá imediatamente $x < -1$ ou $x > 3$. Se fôsse $\frac{x+1}{x-3} < 0$, seria $3 > x > -1$.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1944)

I. S. A. — 2.ª prova escrita — 24 de Outubro de 1944 Ponto n.º 3.

Nota — É obrigatório resolver quatro questões, entre as quais a primeira.

2036 — Na equação $2x^2 + (p^2+2)\,x + 2p^2 - 4 = 0$ determine p com a condição de a diferença entre as raízes ser igual à unidade.

2037 — Numa propriedade existem alguns cavalos, um número exacto de juntas de bois e porcos num total de 34 cabeças. Sabe-se que o tríplo do número de porcos é igual à soma de 5 vezes o número de bois com 3 vezes o número de cavalos. Determine o número de bois, de cavalos e de porcos.

2038 — Um diedro de $105^\circ\ 11',4$ intersécta uma esfera cujo centro está situado sôbre a sua aresta. O plano perpendicular à aresta do diedro e passando pelo centro da esfera contém dois pontos situados à distância de 6,4567 metros um do outro, que pertencem simultâneamente à superfície da esfera e às faces do diedro. Calcule o raio da esfera.

2039 — Determine os valores de x, compreendidos entre π e 2π radianos, que satisfaçam à condição

$$\operatorname{sen}\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right).$$

2040 — Determine o volume do sólido gerado pelo hexágono regular inscrito, quando roda em tôrno de uma diagonal que passa pelo centro, em função do do raio do círculo circunscrito.

2041 — Demonstre que se duas secantes se cortam no ponto de contacto de duas circunferências tangentes, as cordas que unem as suas extremidades são paralelas.

I. S. A. — I.ª prova escrita — 20 de Outubro de 1944 Ponto n.º 4.

Nota — E obrigatório resolver quatro questões, entre as quais a primeira.

2042 — Resolva a inequação $2-\dfrac{4}{6-x}<\dfrac{2x-1}{x+1}$.

2043 — São dados os números a e b. Determine em quantas unidades a difereuça entre o dôbro do 1.º e o 2.º excede o número que se obtém multiplicando pelo excesso pedido o 2.º deminuído de 7 unidades.

Determine os valores de a e de b para que o problema seja indeterminado.

2044 — Considere um triedro com 2 faces iguais, cortado à distância de 10,000 metros do vértice por um plano perpendicular à aresta a do diedro formado pelas faces iguais. Êste diedro mede $48^{\circ}\,27',2$ e o seu plano mediador determina no lado da secção um ponto à distância de 26,917 metros da aresta a. Determine a área da porção de uma das faces iguais do triedro limitada pelo plano secante.

2045 — Exprima $\operatorname{cotg}\left(\dfrac{5}{2}\pi+x\right)$ em função de $\operatorname{sen} x$.

2046 — Determine o raio da base de um cone de altura dada a, cuja área lateral seja igual à área do círculo que tenha por raio a altura do cone.

2047 — Demonstre que, sendo $[ABC]$ um triângulo inscrito numa circunferência, unindo o centro O da circunferência com o meio D do arco $\widehat{BC}$ e tirando a corda $\overline{AD}$, o ângulo $A\widehat{D}O$ é metade da diferença dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ do triângulo.

I. S. C. E. F. — Ponto n.º 2 — **Outubro de 1944.**

As respostas e as passagens essenciais das resoluções devem ser justificadas. Afirmações não justificadas consideram-se como não feitas.

Nota — São obrigatórios quatro pontos, entre os quais, o n.º 1.

2048 — Homotetia, semelhança e simetria. Definições e relações entre os três conceitos.

ARITMÉTICA

2049 — Dispor por ordem de grandeza crescente os números $a_1=1$, $a_2=1+\dfrac{1}{2}$, $a_3=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}$,

$$a_4=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}},\quad a_5=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

R: $a_1<a_3<a_5<a_4<a_2$.

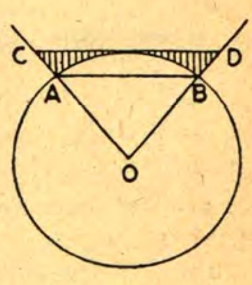
ÁLGEBRA

2050 — Determinar as raízes reais da equação $1-x+x^2-x^3+x^4=1$. Generalizar. R: *A equação é equivalente a* $(1+x^5)/(1+x)=1$ *ou* $1+x^5=1+x$ *(com* $x\neq-1$*), cujas soluções reais são* 0 *e* 1. *A generalização consiste em determinar as raízes reais da equação* $1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-1}+x^{2n}=1$ *ou seja* $(1+x^{2n+1})/(1+x)=1$, *(com* $x\neq-1$*)*.

As suas soluções reais são 0 *e* 1.

GEOMETRIA

2051 — Na circunferência da gravura junta conhece-se o raio r e o comprimento l da corda $\overline{AB}$. Tira-se a tangente CD paralela a AB; calcular a área (sombreada na figura) interior ao triângulo COD e exterior à circunferência.



R: *A área pedida será* $S=S_1-S_2$ *sendo* S_1 a área $[COD]$ *e* S_2 *a área do sector* $[AOB]$. *Da semelhança dos triângulos* $[COD]$ *e* $[AOB]$ *têm-se* $\overline{CD}=l\cdot r/h$ *sendo* $h=\sqrt{4r^2-l^2}/2$ *a altura do triângulo* $[AOB]$ *relativa à base* $\overline{AB}$. *Designando por* α *o ângulo ao centro correspondente a* $\overline{AB}$, *será* $S=l\cdot r^2/2h-r^2\cdot\alpha/2$ $(\alpha=2\operatorname{arc\,sen} l/2r)$.

Trigonometria

2052 — Verificar a identidade $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x - (\cos^6 x - \operatorname{sen}^6 x) + \cos^2 x \,.\, \operatorname{sen}^2 x \,.\, (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$
R : *Basta notar que*

$$\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x = (\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x)\,(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x) = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\,(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x)$$

e efectuar as operações indicadas.

Cálculo Numérico

2053 - Calcular o valor que toma a expressão

$$X = \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} \cdot \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{y}-x} \quad \text{para } x = \operatorname{cotg} 238^\circ 48'.$$

R : *Tendo em atenção que* $x^3+y^3=(x+y)\,(x^2+y^2-xy)$ *obtém-se, efectuando as operações,* $X=1/x=\operatorname{tg} 58^\circ 48'$ *donde* $\log X = 0{,}21780$ *ou* $X = 1{,}651$.

I. S. C. E. F. — Ponto n. 4 — **Julho de 1944**

As respostas e as passagens essenciais das resoluções devem ser justificadas. Afirmações não justificadas consideram-se como não feitas.

Nota — São obrigatórios quatro pontos, entre os quais o n.º 1.

2054 — Circunferência. Propriedades mais importantes. Relações métricas. Medidas de ângulos inscritos e de ângulos formados por secantes.

Aritmética

2055 — Calcular a soma

$$S = 1+1+1/2+2+1/2^2+2^2+\cdots+1/2^n+2^n$$

e determinar o menor valor de n para o qual é $S > 100$.
R : *Trata-se da soma dos têrmos de duas progressões geométricas*:

$$S = (1+1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n) + (1+2+2^2+\cdots+2^n) = (2^{n+1}-1)/2^n + (2^{n+1}-1) = 1+2^{n+1}-1/2^n.$$

Fazendo sucessivamente $n=1,2,3,\cdots$ *obtém-se para* $n=6$

$$S = 129 - 1/64 > 100.$$

Álgebra

2056 — Dada a equação $x^2+ax+b=0$, de raízes α e β, determinar a equação do 2.º grau cujas raízes são $1/\alpha^2$ e $1/\beta^2$. R : *A equação será* $z^2 - Sx + P = 0$ *com* $S = 1/\alpha^2 + 1/\beta^2 = (\alpha^2+\beta^2)/\alpha^2\beta^2 = (a^2-2b)/b^2$ e $P = 1/\alpha^2\beta^2 = 1/b^2$.

Geometria

2057 — Verificar se são compatíveis os seguintes dados acêrca de um paralelipípedo rectângulo:

Soma das três arestas que concorrem num vértice: $S=12$;

Área total: $A=94$;

Diagonal do paralelipípedo: $d=\sqrt{50}$. R : *Sendo* x, y e z *as 3 dimensões do paralelipípedo rectângulo há que verificar a compatibilidade do sistema:*

$$S = x+y+z = 12, \quad A = 2\,(xy+xz+xz) = 94, \quad d^2 = x^2+y^2+z^2 = 50.$$

Com efeito, por ser $S^2 = d^2 + A$, *terá de ser* $12^2 = \sqrt{50}^2 + 94 = 144$ *o que confirma a compatibilidade dos dados.*

Trigonometria

2058 — Dado um triângulo rectângulo de ângulos A (recto) B e C, calcular, em função dos lados, $\cos(A+B-2C)$. R : $\cos(A+B-2C) = \cos(180^\circ - 3C) = -\cos 3C = 3\operatorname{sen}^2 C \,.\, \cos C - \cos^3 C = b\,(3c^2-b^2)/a^3$, *tendo em conta que* $c = a \operatorname{sen} C$ e $b = a\cos C$.

Cálculo numérico

2059 — De um cone circular recto conhece-se a área total $A=75{,}36$ metros quadrados e a altura $h=4$ metros. Calcular a área da base. R : *Sejam* R *o raio da base e* g *a geratriz do cone; de* $A = \pi R^2 + \pi R g$ *e de* $h^2 = g^2 - R^2$ *vem* $A - \pi R^2 = \pi R \sqrt{h^2+R^2}$. *Elevando ao quadrado e simplificando obtém-se*

$$\pi R^2 = A^2/(\pi h^2 + 2A) = (75{,}36)^2/200{,}96 \quad (\pi = 3{,}14).$$

Aplicando logaritmos obtém-se $\pi R^2 = 28{,}26\ m^2$.

Soluções dos n.os 2048 a 2059 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Ponto n.º 2 — **23 de Outubro de 1944.**

2060 — Numa linha de circulação de um metropolitano com 66 quilómetros de perímetro, as estações estão situadas à distância de 3 quilómetros umas das outras. Os combóios circulam à velocidade de 80 quilómetros por hora e param durante 20 segundos em tôdas as estações. Supondo que a distância entre as automotoras de dois combóios consecutivos não pode nunca ser inferior a 2 quilómetros, determine o maior número de combóios que podem passar numa hora em cada estação e o número de combóios precisos para manter tal ritmo no serviço. R : *Como cada combóio percorre dois quilómetros em* 90^s *e demora na estação* 20^s, 110^s *depois de um combóio ter chegado a uma estação poderá passar outro, e por isso o número máximo de combóios que numa hora podem passar numa estação é de 32. Cada combóio leva a percorrer o circuito completo* $22 \times 155^s = 3410^s$, *pois leva de estação a estação com o tempo de estacionamento* 155^s. *Ora em* 3410^s *passam pela mesma estação 31 combóios que será o número necessário para manter o ritmo de serviço pedido.*

2061 — Mostre que se

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2+2\,(x^2+y^2+z^2)\,(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)^2}{(x+y+z)^4-(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{2}$$

se tem também $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}=\dfrac{1}{3}\cdot$ R: *A fracção dada pode escrever-se:*

$$\frac{(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2}{(2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx)\,(2xy+2yz+2zx)}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{4\,(xy+yz+zx)}=\frac{1}{2}$$

ou $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ *donde é* $(x^2+y^2+z^2)^2=$ $=3\,(xy+yz+zx)$ *e portanto* $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\dfrac{1}{3}\cdot$

2062 — Num quadrilátero $ABCD$, os ângulos B e D são rectos, a diagonal AC mede d, o perímetro vale $2p$ e a área é S. Exprima em função dêstes dados os valores dos quatro lados. R: *Se* x, y, z, *e* t *forem os lados do quadrilátero, as equações que resolvem o problema são:*

$$\begin{cases} x+y+z+t=2p \\ xy+zt=2S \\ x^2+y^2=d^2 \\ z^2+t^2=d^2 \end{cases}$$

da 2.ª, 3.ª e 4.ª equações tira-se: $(x+y)^2+(z+t)^2=2d^2+4S$ *que com* $(x+y)+(z+t)=2p$ *permite determinar*

(1) $$x+y=p+\sqrt{d^2+2S-p^2}$$

e

$$z+t=p-\sqrt{d^2+2S-p^2}$$

De (1) *e* $x^2+y^2=d^2$ *tira-se, fazendo* $\Delta=d^2+2S-p^2$

$$x=\frac{p+\sqrt{\Delta}+\sqrt{d^2-2S-2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$

$$y=\frac{p+\sqrt{\Delta}-\sqrt{d^2-2S-2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$

e análogamente

$$z=\frac{p-\sqrt{\Delta}+\sqrt{d^2-2S+2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$

$$t=\frac{p-\sqrt{\Delta}-\sqrt{d^2-2S+2p\sqrt{\Delta}}}{2}.$$

2063 — Uma esfera de 5 metros de raio é atravessada por um cilindro de revolução de 3 metros de raio e cujo eixo passa pelo centro da esfera. ¿ Qual é a área total e qual é o volume do sólido em forma de anel recortado na esfera pelo cilindro? R: *Como o raio da esfera mede* 5m *e o raio da base do cilindro é de* 3m, *a altura do cilindro é de* $2\times4\,\mathrm{m}=8\,\mathrm{m}$. *A área da zona esférica é então* $2\pi\,.\,5\,.\,8=80\pi\,\mathrm{m}^2$. *O volume do anel é dado por* $1/6\,\pi\,.\,8^3=512\,\pi/6$.

2064 — ¿ Qual é a expressão geral de todos os ângulos que satisfazem à condição

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}-\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}-\frac{1}{\cot^2x}-\frac{1}{\sec^2x}-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2x}=-3\,?$$

R: *A expressão dada pode escrever-se:* cosec^2x- $-\operatorname{cotg}^2x-(\operatorname{sen}^2x+\cos^2x)-\sec^2x-(\sec^2x-1)=-3$ *ou* $1-1-2\sec^2x+1=-3$ *ou ainda* $\operatorname{sen}x=\pm\sqrt{2}/2$ *e portanto* $x=n\pi\pm\pi/4$.

2065 — O ângulo sob o qual um observador via determinada tôrre duplicou pelo facto dêle se ter aproximado 110 metros e triplicou quando êle se aproximou mais 50 metros. ¿ Qual era a altura da tôrre? R: *Seja* α, 2α *e* 3α *os ângulos segundo os quais é vista a tôrre dos pontos situados às distâncias* $110+50+x$; $50+x$ *e* x. *É fácil ver que os ângulos sob os quais são vistos, do cimo da tôrre os segmentos de* 110m *e* 50m *são iguais a* α. *Dos triângulos que se podem considerar deduz-se que:*

(1) $$(160+x)\operatorname{tg}\alpha=h\,,$$

(2) $$(50+x)\operatorname{tg}2\alpha=h$$

e

(3) $$110:\operatorname{sen}3\alpha=50:\operatorname{sen}\alpha\,.$$

De (3) *tendo em conta que* $\operatorname{sen}3\alpha=3\operatorname{sen}\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha$ *tira-se que* $15\operatorname{sen}\alpha-20\operatorname{sen}^3\alpha=11\operatorname{sen}\alpha$ *e portanto* $4\operatorname{sen}\alpha=20\operatorname{sen}^3\alpha$ *e* $\operatorname{sen}^2\alpha=1/5$ *ou* $\operatorname{sen}\alpha=+\sqrt{5}/5$ *logo* $\cos\alpha=+2\sqrt{5}/5$, $\operatorname{tg}\alpha=1/2$ *e* $\operatorname{tg}2\alpha=4/3$, *valores que substituídos em* (1) *e* (2) *dão as equaçõs* $200+$ $+4x=3h$ *e* $160+x=2h$ *e finalmente* $h=88\,\mathrm{m}$.

Soluções dos n.os 2060 a 2065 de J. da Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **Exame final — 9 de Junho de 1944** — 2.º ponto.

2066 — É dado o losango de diagonais d e D. Mostre que o rectângulo de area máxima inscrito no losango tem por lados metade do valor das diagonais. R: *Representando por* 2x *e* 2y *os lados do rectângulo paralelos às diagonais menor e maior do losango, e notando que há entre êsses elementos a relação* $\dfrac{D/2-y}{x}=\dfrac{D}{d}$ *ou seja* $y=D/2-Dx/d$ *vem para valor da área* $A(x)=2xD\,(1/2-x/d)=Dx\,(d-2x)/d$. *Extrememos a função* $f(x)=d\,.\,A(x)/D=x\cdot(d-2x)$. *Tem-se:*