José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

GAUSS E A MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

Terá Gauss concebido e mandado levar a cabo uma experiência destinada a testar se o universo é ou não euclidiano?

Figura 1. Carl Friedrich Gauss.

Carl Friedrich Gauss (figura 1) é um colosso na História da Matemática, que também fez notáveis contribuições para a astronomia, a geodesia e outras áreas de ciência. Como pessoa, geralmente é visto como uma figura distante e pouco abordável, que preferia concentrar-se mais nos seus estudos científicos do que em divulgar ou aplicar os seus resultados a problemas concretos[1]. Em contraste com esta imagem, há uma história famosa que circula a respeito de Gauss[2], segundo a qual ele teria medido a soma dos ângulos internos de um triângulo enorme (os seus vértices eram os picos de três montanhas) a fim de testar experimentalmente se o valor obtido era, de facto, igual a π. Já agora, a resposta foi afirmativa (dentro da margem de erro da medição efetuada).

Vejamos em que contexto é que isto teria sido feito. Quando Gauss chegou à idade adulta, no fim do século XVIII, só havia uma geometria: a de Euclides. E nessa geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo, medidos em radianos, é igual a π (proposição 32 do livro I dos *Elementos*). Quando Gauss faleceu, em 1855, já o matemático russo Nikolai Lobachevsky publicara os seus trabalhos sobre geometria não-euclidiana, os quais foram lidos e elogiados por Gauss (que aprendeu russo aos 62 anos de idade). Pela mesma altura que Lobachevsky, o matemático húngaro János Bolyai formulou o mesmo tipo de ideias. De facto, como veio a saber-se mais tarde pelos seus diários e pela sua correspondência, já Gauss pensara bastante em geometria não-euclidiana, embora tenha optado por nada publicar sobre o assunto.

Repare-se que a proposição que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π, embora válida no plano, não é válida noutros contextos. Por exemplo, se, na superfície da Terra, considerarmos, como na figura 2, um triângulo formado por três arcos de círculo máximo, com um vértice num polo e os outros dois vértices no equador, então os ângulos situados no equador são retos, pelo que a soma dos ângulos internos do triângulo é superior a π. No caso particular em que um dos vértices situados no equador está a meio caminho entre o outro vértice e o seu antípoda, então o triângulo tem três ângulos retos, pelo que a soma dos seus ângulos internos é igual a $\frac{3}{2}\pi$. A regra geral é a seguinte: a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é igual a $\pi \times (1 + 4p)$, onde p é a razão entre a área do triângulo e a da esfera.

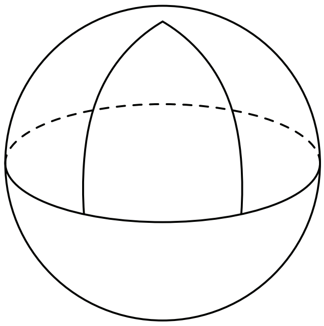

Figura 2. Triângulo esférico.

Gauss interessou-se pela geodesia, ou seja, pelo estudo de como medir e representar a Terra. Inclusivamente, inventou em 1821 um instrumento, o heliotropo (veja-se a figura 3), destinado a levantamentos geodésicos, o qual foi usado para esse fim durante um século e meio. E é verdade que, num levantamento geodésico feito sob a sua supervisão, foram medidos os ângulos internos de um triângulo cujos vértices eram os picos de três montanhas.

A partir daqui, é fácil pensar que Gauss quis que fossem medidos os ângulos atrás mencionados para testar se os enunciados da geometria euclidiana são ou não válidos no universo físico. Foi precisamente isso o que pensou Sartorius von Walterschausen, um geólogo que foi colega de Gauss na Universidade de Göttingen, no que viria a ser apoiado décadas mais tarde por outro matemático de Göttingen, Felix Klein. A ser assim, Gauss teria concebido uma experiência que permitiria, em princípio, decidir se o Universo é ou não euclidiano.

Só que não foi isto o que se passou.

Gauss, de facto, recorreu às medições dos ângulos internos de um grande triângulo para fazer uma experiência, mas que tinha um objetivo bastante menos mediático do que aquele que foi conjeturado depois. Ao projetar-se sobre um plano uma porção da superfície terrestre, as amplitudes dos ângulos sofrem alterações e há uma fórmula, da autoria de Lagrange, que permite calcular a amplitude dos ângulos projetados em função dos ângulos originais, cuja dedução parte do princípio de que a Terra é uma esfera. Mas acontece que não é, pois é ligeiramente achatada nos polos. As medições das amplitudes dos ângulos serviram para determinar se a fórmula de Lagrange podia ainda ser aplicada, sem que o erro fosse significativo. E, de facto, assim é [3].

Se o leitor, ao chegar a este ponto, ficou com a impressão de que afinal Gauss só estava interessado em ciência teórica, deve lembrar-se de uma coisa: ele inventou o heliotropo!

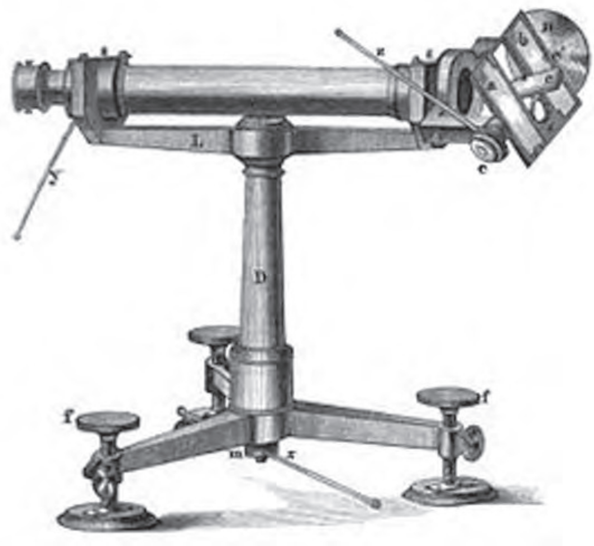

Figura 3. Heliotropo.

[1] Uma exceção a isto consiste no desenvolvimento do método dos mínimos quadrados, que foi criado para ser empregue (e foi efetivamente empregue) na deteção de objetos celeste após um reduzido número de observações.

[2] Veja-se *http://www.mathaware.org/mam/05/shape.of.universe.html* ou *http://thatsmaths.com/2014/07/10/gausss-great-triangle-and-the-shape-of--space/*.

[3] Para mais detalhes, veja-se *The Myth of Gauss' Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space*, de Arthur I. Miller (Isis, Vol.63, No.3, (1972), pp. 345-348).