No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

TRIÂNGULOS BELOS

Verificaremos como a propriedade de os três lados de um triângulo plano serem iguais resulta de uma combinação harmoniosa, e única, de lados e ângulos.

Um triângulo diz-se equilátero se os quocientes entre os comprimentos dos seus lados forem iguais a 1. Que triângulos do plano têm estes três quocientes racionais? Dado um triângulo no plano com lados de comprimentos a, b e c tais que existem números naturais p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 e q_3 que verificam $a/b = p_1/q_1$, $b/c = p_2/q_2$ e $a/c = p_3/q_3$ podemos reescalonar o triângulo e obter outro semelhante com lados racionais. Para isso, basta usar a homotetia $H_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x/c,\ y/c)$, que transforma o triângulo inicial num de lados $a' = (p_1\, p_2)/(q_1\, q_2)$, $b' = p_2/q_2$ e $c' = 1$. Se, de seguida, aplicarmos a homotetia $H_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (q_1\, q_2\, x,\ q_1\, q_2\, y)$, obtemos um triângulo de lados inteiros.

Se o triângulo é retângulo, com a versão semelhante que acabámos de construir entramos no mundo vasto dos triângulos pitagóricos. A figura 1 ilustra um deles: note-se que, além de os lados terem comprimentos inteiros, os três ângulos têm cossenos racionais, pois são $\pi/2$, $\arccos(3/5)$ e $\arccos(4/5)$.

Mas há muitas outras possibilidades. Veja-se, por exemplo, o triângulo escaleno de lados com comprimentos 5, 6 e 7: neste caso, os ângulos também têm cossenos racionais pois são $\arccos(1/5)$, $\arccos(5/7)$ e $\arccos(19/35)$. Repare-se agora no outro triângulo da figura 2: os quocientes entre as amplitudes dos ângulos são racionais, mas nem todos os quocientes dos lados o são.

Se, todavia, juntarmos as condições

Q_1: *Os quocientes entre os comprimentos dos três lados são racionais.*

Q_2: *Os quocientes entre as amplitudes dos três ângulos são racionais.*

então ficamos reduzidos aos triângulos equiláteros.

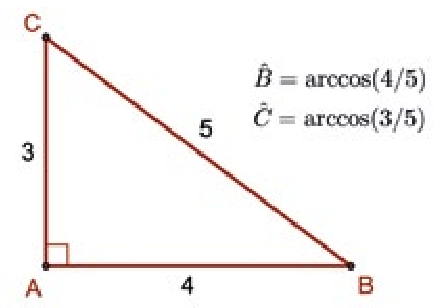

Figura 1

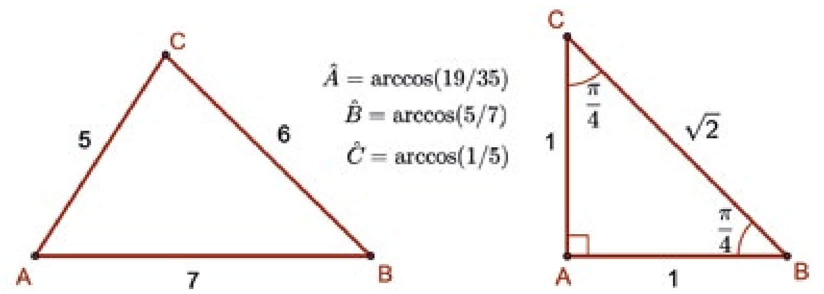

Figura 2

Obviamente, um triângulo equilátero satisfaz as duas hipóteses Q_1 e Q_2, com a particularidade de os seis quocientes em causa serem iguais a 1. Vejamos que também é válida a implicação recíproca, ou seja:

$\mathcal{P}_1$: *Se, num triângulo, são racionais os quocientes entre os comprimentos dos três lados e entre as amplitudes dos três ângulos, então o triângulo é equilátero.*

Seja $\mathcal{T}$ um tal triângulo de lados a, b, c e ângulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Reescalonando-o, como se explicou anteriormente, podemos supor que a, b, c são racionais (ou mesmo inteiros). Além disso, podemos reescrever $\angle A = \pi\,\alpha_A$, $\angle B = \pi\,\alpha_B$ e $\angle C = \pi\,\alpha_C$ para uma escolha adequada de reais positivos α_A, α_B, α_C. Acrescente-se que, pela hipótese Q_2, existem racionais positivos s_1, s_2 e s_3 tais que $\angle A/\angle B = s_1$, $\angle B/\angle C = s_2$ e $\angle A/\angle C = s_3$. Logo, tem-se $\alpha_A = s_3\,\alpha_C$ e $\alpha_B = s_2\,\alpha_C$, e, como a soma dos ângulos de um triângulo plano é igual a π, deduzimos que $s_3\,\alpha_C + s_2\,\alpha_C + \alpha_C = 1$. Consequentemente, $\alpha_C = 1/(1 + s_2 + s_3) \in \mathbb{Q}$. Em resumo: Se os quocientes das amplitudes dos ângulos de um triângulo plano são racionais, então os ângulos são múltiplos racionais de π.

Neste momento é oportuno reunirmos o que já sabemos sobre $\mathcal{T}$:

1. É semelhante a um triângulo com lados racionais (consequência de Q_1).
2. Os seus ângulos são múltiplos racionais de π(consequência de Q_2).

Conseguiremos obter mais informação sobre a forma de um tal triângulo se aliarmos as duas propriedades anteriores, o que pode ser feito através do Lei dos Cossenos. Sendo os lados a, b, c racionais, então

$$\cos(\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos(\angle B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ e}$$
$$\cos(\angle C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

são números racionais. Este é um dado muito bem-vindo, porque se conhecem todos os ângulos $\theta \in [0, \pi]$ que são múltiplos racionais de π e têm cosseno racional: θ é 0, π, $\pi/2$, $\pi/3$ ou $2\pi/3$, cujos cossenos são, respetivamente, ± 1, 0 e $\pm 1/2$. Com este resultado (pode ver-se uma prova em [2]), estamos em condições de estabelecer a caracterização que procurávamos para o triângulo $\mathcal{T}$. Realmente, $\mathcal{T}$ tem de ser equilátero porque é semelhante a um triângulo com lados racionais, cujos ângulos estão em $]0, \pi[$ mas nenhum deles é $\pi/2$ (caso contrário, um dos outros dois teria de ser menor ou igual a $\pi/4$ e o seu cosseno não teria um valor permitido) nem $2\pi/3$ (por razão idêntica); logo, os três ângulos são iguais a $\pi/3$.

Cada uma das propriedades $\mathcal{P}_1$ e

$\mathcal{P}_2$: *Se $\theta \in [0, \pi]$ é um múltiplo racional de π e tem cosseno racional, então $\theta \in \{0, \pi, \pi/2, \pi/3, 2\pi/3\}$.*

pode ser deduzida a partir da outra.

Para o provar, e uma vez que $\cos(\{0, \pi, \pi/2\}) = \{1, -1, 0\}$ e que $\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$, podemos restringir a análise a ângulos de $]0, \pi/2[$. Seja $\theta \in\,]0, \pi/2[$ um ângulo cuja amplitude é um múltiplo racional de π e tem cosseno racional. Construa-se o triângulo da figura 3, de lados 1, 1, $2\cos\theta$ e ângulos θ, θ, $\pi - 2\theta$. Observe-se que estes três ângulos são múltiplos racionais de π. Além disso, tendo em conta a hipótese de que $\cos\theta$ é um número racional, os quocientes dos comprimentos dos lados deste triângulo são racionais. Logo, podemos aplicar $\mathcal{P}_1$ e concluir que o triângulo é equilátero. E, portanto, $\theta = \pi/3$.

Note-se que, no que aqui ficou dito, fizemos uso de várias propriedades dos triângulos planos que não são válidas em geometrias não euclidianas, ainda que nelas um triângulo equilátero possa ser também equiângulo. Por exemplo, na esfera de raio $2/\pi$ podemos traçar o triângulo (pitagórico) de lados 1, 1, 2 e ângulos $\pi/2$, $\pi/2$, π (figura 4). E, nela, estão também: o triângulo com estes mesmos lados mas de ângulos $3\pi/2$, $3\pi/2$ e π; um triângulo equilátero cujos três lados se situam no equador e que tem os três ângulos iguais a π; um triângulo pitagórico e equilátero de lado 1 e com os três ângulos iguais a $\pi/2$. (Podem construir-se imagens destes triângulos em [1]). Qual será a versão esférica da caracterização dos triângulos equiláteros planos?

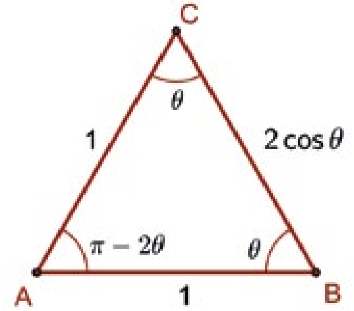

Figura 3

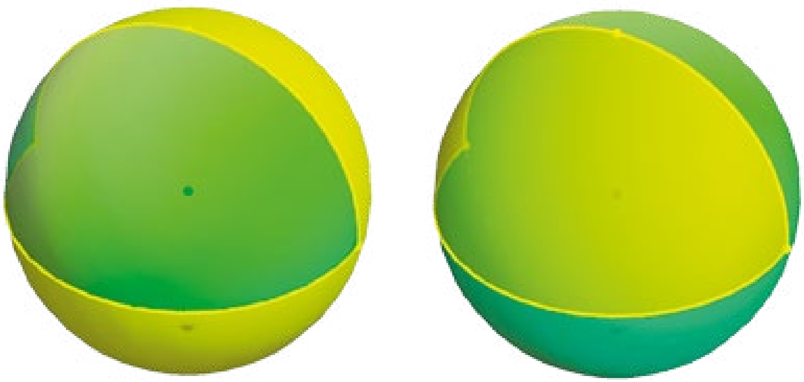

Figura 4

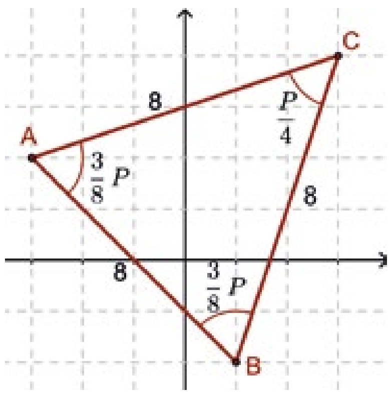

Figura 5

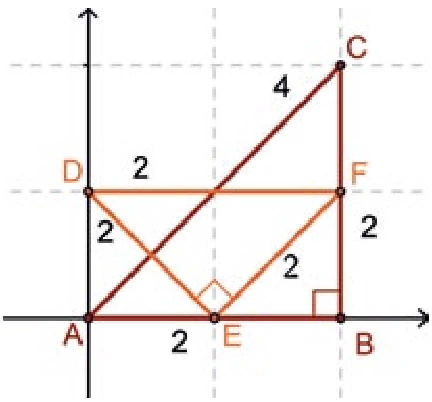

Figura 6

Seria também interessante analisar, na perspetiva anterior, as propriedades dos triângulos equiláteros planos quando optamos por outros modos de medir as distâncias em $\mathbb{R}^2$. Considere-se, por exemplo, a geometria-do-táxi. Neste modo de medir comprimentos, uma circunferência tem a forma de um quadrado da geometria euclideana com os lados fazendo 45º com os eixos coordenados; π é substituído por $P = 4$; e a soma dos ângulos de qualquer triângulo é P. Contudo, um triângulo equilátero pode não ser equiângulo. Observe-se, por exemplo, o triângulo da figura 5 cujos lados medem 8, dois dos ângulos têm amplitude $3/8P$ e o terceiro mede $P/4$.

E há outras diferenças. O Teorema de Pitágoras não admite uma extensão a esta métrica, como mostram os triângulos *DEF* e *EBF* da figura 6, um de lados 1, 1, 2, ângulo retângulo em *B* e hipotenusa medindo 2, e outro que é equilátero, retângulo em *E* e cuja hipotenusa também mede 2. Adicionalmente, falham testes de semelhança que foram fundamentais no argumento anterior. Por exemplo, os triângulos *ABC* e *DEF* da figura 6 indicam que um triângulo nesta geometria não está univocamente determinado se forem conhecidos dois lados e o ângulo por eles formado.

Haverá algum critério, análogo ao que vimos no plano com a métrica euclidiana, para testar se um triângulo na geometria-do-táxi é equilátero? Para explorar esta questão, o leitor é convidado a utilizar o módulo interativo em [2], que permite calcular rapidamente distâncias e ângulos nesta métrica. (Uma imagem dessa utilização consta da figura 7.)

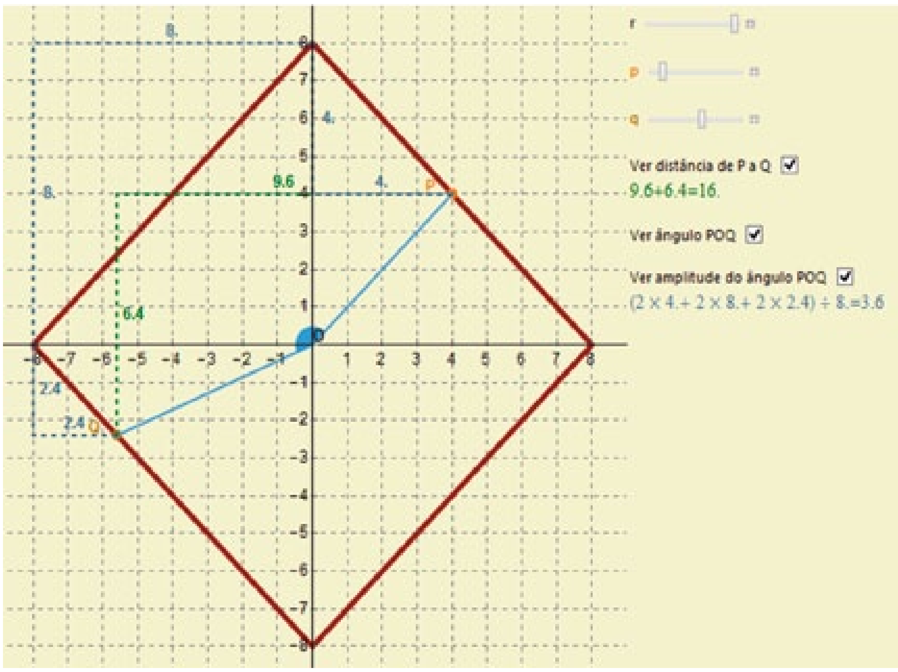

Figura 7

REFERÊNCIAS

[1] *http://atractor.pt/mat/GeomEsf/index.htm*

[2] *http://www.atractor.pt/mat/triangulos_belos*