Os integrais calculam-se pela fórmula

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

3728 — A partir do integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+a} \quad \text{calcule} \quad \int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}.$$

R: $F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+a} = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{a\,e^{-x}+1} dx =$

$$= -\frac{1}{a}\Big[\log(a\,e^{-x}+1)\Big]_0^1 = -\frac{1}{a}\log\frac{a\,e^{-1}+1}{a+1}.$$

Por derivação paramétrica nota-se que:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2} = -F'(1).$$

3729 — Calcular

$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^4 3\theta \cos^3 6\theta \, d\theta$. R: *Fazendo* $3\theta = \varphi$ *vem*

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\varphi \cos^3 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\varphi\,(-2\operatorname{sen}^2\varphi+1)^3 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^4\varphi - 4\operatorname{sen}^6\varphi + 12\operatorname{sen}^8\varphi - 8\operatorname{sen}^{10}\varphi)\, d\varphi.$$

Os integrais de tipo $I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}\varphi \, d\varphi$ *calculam-se pela fórmula*

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Enunciados e soluções dos n.os 3699 a 3729 de M. S. Madureira.

PROBLEMAS

Com o n.º 53 terminou o primeiro concurso anual. O Sr. José Machado Gil, da Barquinha, foi o único concorrente que resolveu todos os problemas propostos na Secção Média desde o n.º 51. Tem por isso direito ao prémio que anunciamos: 1 exemplar do vol. **1**, fasc. 1 e 2 da *Álgebra Moderna* por L. Van der Waerden e 1 exemplar do vol. I do *Boletim da S. P. M.*, que lhe enviámos. A Redacção deseja assinalar que se receberam também, da quasi totalidade dos problemas, soluções muito elegantes do Sr. Vinhas Novais.

Com o n.º 54 iniciou-se novo concurso que termina com este número 56. Dos seus resultados daremos oportunamente notícia.

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3730 — Mostre que qualquer que seja x é impossível a seguinte dupla desigualdade

$$-2 \leqslant tg\,2x\,tg\,x < 0$$

3731 — Sejam os pontos $O(0,0)$, $P(1,p)$, $Q(q,0)$ e $R(4,r)$ os vértices consecutivos duma poligonal plana, de tal modo que $\sphericalangle OPQ = \sphericalangle PQR = 90°$. Se for $p = 2\cos A$, mostre que $r = 2\cos 3A$.

Secção Média

3732 — Demonstrar que a representação gráfica da função $y = [x]^2 + (2[x]+1)(x-[x])$, onde $[x]$ representa o maior inteiro contido em x, para $x > 0$ é uma linha poligonal inscrita na parábola $y = x^2$. (Darboux).

3733 — Duas esferas de raios R e r assentes no plano xy são tangentes exteriormente. A de raio R tem o centro na parte positiva do eixo dos zz, e a outra tem o centro de coordenadas positivas no plano yz. Determine as coordenadas do ponto de contacto.

N. R. — Os números 3650 a 3655, atribuidos aos problemas desta secção no n.º 55 da revista, devem ser substituidos pelos n.os 3669 a 3674. Pede-se ao leitor para fazer a respectiva correcção, evitando assim enganos em futuras citações.

Por ter saido com incorrecções o enunciado do problema 3671 no mesmo número (que figurou com o n.º 3652) publica-se a seguir o enunciado correcto:

3671 — Designando por $[x]$ o maior inteiro contido em x demonstrar que sendo n um inteiro positivo e x um número real se tem sempre

$$[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \left[x+\frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [n\,x]$$

Resolução dos problemas do concurso propostos no n.º 53

3605 — Apresentaram soluções correctas os Srs. Vinha Novais e Machado Gil, publicando-se a solução do primeiro:

R: *Representando por* x *a base desconhecida* $(x<10)$ *e por* $a, b, c\ (<x)$ *os algarismos do número pedido em ambas as bases, tem-se* $10^2 a + 10 b + c = x^2 c + x b + a$ *ou* $99 a + (10-x) b + (1-x^2) c = 0$.

Atendendo a que o número se escreve com três algarismos em ambas as bases, será necessariamente $x \geqslant 4$, *e teremos então as seguintes hipóteses a considerar:*

1.ª H)	$x=4 \cdots 99a+6b-15c=0$	com	$a, b, c<4$
2.ª H)	$x=5 \cdots 99a+5b-24c=0$	»	$a, b, c<5$
3.ª H)	$x=6 \cdots 99a+4b-35c=0$	»	$a, b, c<6$
4.ª H)	$x=7 \cdots 99a+3b-48c=0$	»	$a, b, c<7$
5.ª H)	$x=8 \cdots 99a+2b-63c=0$	»	$a, b, c<8$
6.ª H)	$x=9 \cdots 99a+1b-80c=0$	»	$a, b, c<9$

Procurando quais destas equações admitem soluções inteiras e positivas satisfazendo as respectivas desigualdades, verifica-se que só a 6.ª hipótese admite solução em tais condições, solução única que é $a=4, b=4$ *e* $c=5$.

Então temos $445_{(10)} = 544_{(9)}$ *como solução única do problema.*

3606 — Apresentou solução exacta, que se publica, o Sr. Vinhas Novais:

R: *Consideremos a esfera concêntrica com a esfera dada e de raio* $2R$, *lugar geométrico dos centros das esferas de raio* R *tangentes à esfera dada. Seja* O_1 *um ponto desta esfera; tracemos, sobre a esfera e com polo em* O_1, *uma circunferência cujos pontos distem* $2R$ *do polo; tal circunferência é o lugar geométrico das esferas de raio* R *tangentes à esfera dada e à de centro em* O_1 *e raio* R. *Tomemos um ponto* O_2 *sobre esta circunferência e tomando-o para polo tracemos uma outra circunferência cujos pontos distem* $2R$ *de* O_2; *esta circunferência é o lugar geométrico dos centros das esferas de raio* R *tangentes à esfera dada e à de centro em* O_2 *e raio* R; *sejam* O_3 *e* O_4 *os pontos em que esta circunferência intersecta a circunferência de polo em* O_1: *as esferas de raio* R *de centros em* O_3 *e* O_4 *são tangentes, simultaneamente à esfera dada, à esfera de centro em* O_1 *e à de centro em* O_2. *Procedamos em relação a* O_3 *como procedemos em relação a* O_1 *e a* O_2 *e assim sucessivamente para cada novo ponto determinado. Para vermos quantos destes pontos podemos determinar vamos considerar um plano tangente à esfera de raio* $2R$ *no outro extremo do diâmetro que passa por* O_1 *e, tomando* O_1 *para centro de projecção projectemos sobre esse plano as cicunferrências atrás consideradas. Reduzido, assim, o problema ao plano vemos que podemos traçar 12 esferas tangentes à dada nas condições do problema e que, destas, 6 são tangentes simultaneamente a 5 destas últimas.*

3607 — Apresentaram soluções certas os Srs. Vinhas Novais e Machado Gil, publicando-se a deste último:

R: *A equação* $\cos 2x + \xi \operatorname{sen} x = \eta$ *pode escrever-se* $1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \xi \operatorname{sen} x = \eta$ *e, fazendo* $\operatorname{sen} x = \zeta$

$$(1) \qquad 2\zeta^2 - \xi\zeta + \eta - 1 = 0$$

Como $|\zeta| \leqslant 1$, *esta equação representa a porção do paraboloide hiperbólico* $2\zeta^2 - \xi\zeta + \eta - 1 = 0$ *entre os planos* $\zeta = 1$ *e* $\zeta = -1$. *Estes planos intersectam o paraboloide segundo as geratrizes de projecções*

$$(2) \qquad \xi - \eta - 1 = 0 \ \ e \ \ \xi + \eta + 1 = 0 .$$

O plano $\zeta = p$ *corta o paraboloide segundo uma geratriz de projecção*

$$(3) \qquad \eta = p\xi + 1 - 2p^2 .$$

De (1) vem $\zeta = \dfrac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 8\eta + 8}}{4}$ *que mostra que os pontos do paraboloide projectam-se na região de* $\xi O \eta$ *em que* $\xi^2 - 8\eta + 8 \geqslant 0$.

A curva $\varphi(\xi, \eta) \equiv \xi^2 - 8\eta + 8 = 0$ *é uma parábola de concavidade voltada para os* $\eta\eta$ *positivos e de vértice* $(0, 1)$, *e é a envoluente das rectas (3). Divide o plano* $\xi O \eta$ *em duas regiões: a do ponto* $(0, 2)$ *em que* $\varphi(\xi, \eta) < 0$, *e a do ponto* $(0, 0)$ *em que* $\varphi(\xi, \eta) > 0$.

Na região negativa não se projectam pontos do paraboloıde. As rectas (2) encontram a parábola respectivamente nos pontos $(4, 3)$ *e* $(-4, 3)$.

Por um ponto (ξ, η) *passa uma recta (3) de coeficiente angular* p *dado por*

$$2p^2 - \xi p + \eta - 1 = 0 .$$

Quando $\xi^2 - 8\eta + 8 > 0$ *há dois valores de* p *diferentes. Impondo a condição dos dois valores de* p *satisfazerem a* $|\zeta| < 1$, *terá de ser* 1 *maior do que os dois valores* p *e* -1 *inferior a ambos e necessàriamente* $-4 < \xi < 4$. *Também* $-\xi + \eta + 1 > 0$ *e* $\xi + \eta + 1 > 0$.

A primeira desigualdade é verificada em todos os pontos da região positiva definida pela recta $-\xi + \eta + 1 = 0$; *passa-se no sentido de* $\vec{v}(-1, 1)$ *da região negativa do plano para a região positiva. Ànalogamente a segunda desigualdade é verificada na região positiva, determinada por* $\xi + \eta + 1 = 0$ *e dada por* $\vec{u}(1, 1)$.

Por cada ponto da região limitada pelas rectas $\xi + \eta + 1 = 0$ *e* $-\xi + \eta + 1 = 0$ *e a parábola* $\xi^2 - 8\eta + 8 = 0$, *compreendendo as rectas e excluindo a parábola, passam duas rectas (3) com coeficiente angular* $|p| < 1$. *Nas regiões do plano comum à região negativa de* $-\xi + \eta + 1 = 0$ *e à positiva de* $\xi + \eta + 1 = 0$ *e comum à região negativa de* $\xi + \eta + 1 = 0$ *e a po-*

sitiva de $-\xi+\eta+1=0$ *existe um só valor de* p *para cada ponto, com* $|p|<1$. *Como quem diz uma só tangente à parábola.*

Em resumo:

Quando (ξ,η) *é um ponto da região do plano* $\xi O \eta$, *limitada pelos segmentos de recta* $(4,3)\,(0,-1)$ *e* $(-4,3)\,(0,-1)$ *e o arco da parábola* $\xi^2-8\eta+8=0$ *entre os pontos* $(4,3)$ *e* $(-4,3)$, *com inclusão dos segmentos de recta e exclusão do arco da parábola, a equação proposta tem dois sistemas de soluções dadas por* $\operatorname{sen} x=\zeta$ *e* $\operatorname{sen} x=\zeta'$ *ou* $x=k\pi+(-1)^k \operatorname{Arc\,sen}\zeta$ *e* $x=k\pi+(-1)^k\operatorname{Arc\,sen}\zeta'$.

Quando (ξ,η) *é ponto do ângulo* $(4,3)\,\widehat{(0,-1)}\,(4,-5)$, *ou do ângulo* $(-4,3)\,\widehat{(0,-1)}\,(-4,-5)$, *com exclusão dos segmentos* $(4,3)\,(0,-1)$ *e* $(-4,3)\,(0,-1)$, *ou do arco da parábola* $\xi^2-8\eta+8=0$ *entre os pontos* $(4,3)$ *e* $(-4,3)$, *a equação proposta admite só o sistema de soluções dado por* $\operatorname{sen} x=\zeta''$ *ou* $x=k\pi+(-1)^k\operatorname{Arc\,sen}\zeta''$.

Quando (ξ,η) *é qualquer outro ponto, a equação proposta não tem soluções.*

3608 — Foram recebidas soluções correctas dos Srs. Vinhas Novais e Machado Gil, publicando-se a do primeiro:

R: *Seja* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$; *pelas condições do problema deve verificar-se a identidade*

$$ax^6+bx^4+cx^2+d=-ka^2x^6+k(b^2-2ac)x^4-$$
$$-k(c^2-2bd)x^2+kd^2$$

identidade que implica a igualdade dos coeficientes dos termos do mesmo grau:

$$a=-ka^2;\ b=kb^2-2kac;\ c=-kc^2+2kbd;\ d=kd^2.$$

A primeira equação, atendendo a que $a\neq 0$, *conduz à solução única* $a=-1/k$, *e a última às duas soluções* $d=0$ *e* $d=1/k$; *para* $a=-1/k$ *e* $d=0$ *vem, da terceira equação,* $c=0$ *e* $c=-1/k$; *para* $c=0$ *vem, da segunda equação,* $b=0$ *e* $b=1/k$; *para* $c=-1/k$, *vem* $b=2/k$ *e* $b=-1/k$. *Temos, pois, as seguintes soluções para o sistema:*

1.ª Sol.	*2.ª Sol.*	*3.ª Sol.*	*4.ª Sol.*
$a=-1/k$	$a=-1/k$	$a=-1/k$	$a=-1/k$
$b=0$	$b=1/k$	$b=2/k$	$b=-1/k$
$c=0$	$c=0$	$c=-1/k$	$c=-1/k$
$d=0$	$d=0$	$d=0$	$d=0$

Para $a=-1/k$ *e* $d=1/k$, *a 2.ª e 3.ª equações dão*

$$b=kb^2+2c \quad e \quad c=-kc^2+2b$$

e eliminando b *vem*

$$k^3c^4+2k^2c^3-kc^2+6c=0$$

equação que admite a raíz $c=0$ *a que corresponde* $b=0$. *Dividindo por* c *esta equação, vem a equação*

$$k^3c^3+2k^2c^2+6-kc=0$$

que admite a solução $c=-3/k$ *a que corresponde* $b=3/k$. *Dividindo agora esta última equação por* $c+3/k$ *obtem-se a equação* $k^2c^2-kc+2=0$, *que não admite soluções reais. Temos assim mais as duas últimas soluções reais do sistema primitivo:*

5.ª Sol.	*6.ª Sol.*
$a=-1/k$	$a=-1/k$
$b=0$	$b=3/k$
$c=0$	$c=-3/k$
$d=1/k$	$d=1/k$

Então os polinómios que satisfazem as condições impostas são

$$f_1(x)=-1/k\,x^3$$
$$f_2(x)=-1/k\,x^3+1/k\,x^2$$
$$f_3(x)=-1/k\,x^3+2/k\,x^2-1/k\,x$$
$$f_4(x)=-1/k\,x^3-1/k\,x^2-1/k\,x$$
$$f_5(x)=-1/k\,x^3+1/k$$
$$f_6(x)=-1/k\,x^3+3/k\,x^2-3/k\,x+1/k.$$

Nota — Dos n.ºs 3609 e 3610, não se receberam na Redacção soluções. As soluções destes últimos bem como as dos problemas do n.º 54 da G. M., serão publicadas oportunamente.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

101 — PÉRÈS, Joseph — **Mécanique Générale** — Masson et C.ie, Paris, 1953.

A obra que apresentamos ao público português destina-se dum modo geral aos estudantes das faculdades de ciências, aos engenheiros, aos físicos, etc., em suma, a todo o estudioso que pretenda ficar ao corrente dos métodos da Mecânica Analítica.

O conteúdo do livro corresponde ao programa dos cursos de Mecânica Racional das faculdades de ciências francezas e é apresentado por uma forma interessante pela sua originalidade. Com efeito, a